

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**  
**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ГЕОДЕЗИИ И КАРТОГРАФИИ**  
**(МИИГАиК)**

---

**Р. Ш. Исламов**

**НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА**

Учебное пособие  
по курсу «Когерентная и нелинейная оптика»

Москва 2008

УДК 535.8, 530.182  
ББК 22.343

Рецензенты: кандидат техн. наук, профессор Шерешев А.Б.,  
доктор физ.-мат. наук, профессор Низьев В.Г.

**Исламов Р. Ш. Нелинейная оптика.** Учебное пособие по курсу «Когерентная и нелинейная оптика». – М.: Изд-во МИИГАиК, 2008 г. – 152 с.

Изложены базовые вопросы физики нелинейного взаимодействия световых волн. В приложениях приведены сведения справочного характера по математике и физике, имеющие отношение к нелинейной оптике.

Ил. 24. Табл. 2. Библиограф.: 16 назв.

Рекомендовано УМО по образованию в области приборостроения и оптотехники в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 200200 – «Оптехника», специальности 200201 – «Лазерная техника и лазерные технологии».

Протокол № ??? от ??? 2008 заседания Президиума Совета УМО.

ISBN???

© Московский государственный  
университет геодезии и картографии  
(МИИГАиК), 2008 г.

© Исламов Р.Ш., 2008 г.

# Оглавление

Предисловие.....	5
Список принятых обозначений.....	6
1. Уравнения Максвелла в нелинейной среде. Нелинейная поляризация.....	7
1.1. Макроскопическая нелинейная оптика.....	7
1.2. Поляризация и восприимчивость вещества.....	10
1.3. Плотность потока электромагнитной энергии.....	12
1.4. Энергия поля в среде.....	13
2. Общие свойства восприимчивостей.....	17
2.1. Классификация сред.....	17
2.2. Перестановочная симметрия нелинейных восприимчивостей....	18
2.3. Пространственная симметрия нелинейных восприимчивостей...	21
3. Классические модели оптического ангармонизма.....	27
3.1. Газ свободных электронов как модель нелинейной поляризуемости.....	27
3.2. Ангармонический осциллятор как модель нелинейной поляризуемости.....	31
3.3. Стрикционный ангармонизм.....	33
3.4. Коррекция $c^{(n)}$ за счет локального поля.....	36
4. Возбуждение волн нелинейной поляризации.....	41
4.1. Волновое уравнение для среды с нелинейной поляризацией....	41
4.2. Связанные волны в нелинейной среде.....	41
4.3. Метод последовательных приближений.....	42
4.4. Приближение медленно меняющихся амплитуд.....	43
5. Генерация оптического излучения в квадратичных средах.....	46
5.1. Укороченное уравнение для генерации второй гармоники в приближении плоских волн.....	46
5.2. Генерация второй гармоники при синхронизме.....	47
5.3. Несинхронный режим удвоителя.....	48
5.4. Условия фазового синхронизма при генерации второй гармоники.....	49
5.5. Генерация суммарной частоты в приближении плоских волн....	51
5.6. Условия фазового синхронизма трех коллинеарных волн	53
5.7. Генерация второй субгармоники.....	55
5.8. Основные параметрические трехчастотные процессы.....	58
6. Нелинейное рассеяние лазерного излучения.....	62
6.1. Вынужденное комбинационное рассеяние.....	62
6.2. Вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна.....	69

7. Непараметрические резонансные процессы.....	73
7.1. Линейное поглощение (закон Бугера).....	74
7.2. Двухфотонное поглощение.....	74
7.3. Эффект насыщения.....	74
8. Самофокусировка.....	79
8.1. Уравнение для слабоизменяющихся пучков в слабонеоднородных средах.....	79
8.2. Неустойчивость неограниченной плоской волны.....	81
8.3. Самофокусировка и дефокусировка гауссовых пучков.....	82
8.4. Тепловая самофокусировка.....	85
8.5. Самофокусировка в поглощающих средах.....	87
8.6. Дефокусировка световых пучков.....	87
9. Распространение импульсного излучения в нелинейных средах.....	89
9.1. Сильные электромагнитные волны.....	89
9.2. Самообострение импульса.....	90
9.3. Самообострение ограниченных самофокусирующихся импульсов.....	91
9.4. Квазистационарная самофокусировка лазерных импульсов...	93
9.5. Нестационарная самофокусировка.....	97
9.6. Фазовая самомодуляция.....	99
10. Самовоздействие: вырожденное четырехволновое смещение.....	102
10.1. Обращение волнового фронта.....	102
10.2. Вырожденное четырехволновое смещение.....	105
10.3. ОВФ, основанное на эффекте вынужденного рассеяния.....	109
10.4. Применение ОВФ.....	110
11. Нестационарные эффекты.....	112
11.1. Стационарные импульсы – солитонный режим распространения.....	112
11.2. Наведенный псевдодиполь в двухуровневой системе.....	114
11.3. Нестационарная нутация и затухание свободной поляризации	116
11.4. Фотонное эхо.....	117
11.5. Самоиндуцированная прозрачность.....	120
11.6. Сверхизлучение.....	120
Решения задач.....	123
Приложение А. Ортогональные преобразования.....	135
Приложение Б. Тензоры в прямоугольной системе координат.....	139
Приложение В. Элементы векторного анализа.....	145
Приложение Г. Полезные константы и основные формулы электромагнетизма в СИ и гауссовой системе.....	148
Приложение Д. Полезные тригонометрические формулы.....	150
Литература.....	151

## Предисловие

Нелинейная оптика – одно из важнейших научных направлений современной оптики и лазерной физики. Изобретение лазера привело к бурному развитию нелинейной оптики и широкому применению ее достижений. Огромный накопленный объем знаний делает эту область труднообозримой. В связи с этим необходим вводный курс с изложением основных разделов и принципов нелинейной оптики.

Цель дисциплины – формирование у студентов представлений о нелинейном оптическом взаимодействии интенсивного излучения с веществом для практического применения и использования этих знаний при изучении других дисциплин.

Задача дисциплины – дать студентам знание основных законов и явлений когерентной и нелинейной оптики и увязать эти знания с другими дисциплинами специальности и общефизическими дисциплинами для анализа наблюдаемых явлений и формирования устройств с требуемыми оптико-физическими свойствами.

Курс базируется на знании основных положений и терминологии курсов "Физика", "Волновая оптика", "Квантовая механика", "Дифференциальное и интегральное исчисление", "Векторный анализ", "Теория матриц", "Тензорный анализ" и является базовым для изучения курса "Взаимодействие лазерного излучения с веществом".

## Список принятых обозначений

- B** – индукция магнитного поля  
**D** – индукция электрического поля  
**E** – напряженность электрического поля  
 **$\mathcal{E}$**  – амплитуда электрического поля  
**H** – напряженность магнитного поля  
**I** – интенсивность излучения  
**L** – длина нелинейной среды  
**M** – масса молекулы  
**N** – концентрация (плотность числа частиц)  
**P** – поляризация  
**P** – мощность электромагнитного излучения  
**S** – вектор Пойтинга  
**T** – температура  
**W** – плотность энергии электромагнитного поля  
**c** – скорость света в вакууме  
**e** – элементарный заряд (считается положительным во всех формулах)  
**h,  $\hbar$**  – постоянная Планка  
**k** – волновой вектор  
**k** – волновое число  
 **$l_{NL}$**  – длина нелинейного взаимодействия  
 **$l_{coh}$**  – длина когерентности  
**m** – масса электрона  
**n** – единичный вектор внешней нормали  
**n** – показатель преломления  
 **$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{l}$**  – радиус-вектор  
 **$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{l}$**  – орты правой винтовой ( **$\mathbf{l} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$** ) декартовой прямоугольной системы пространственных координат  $x, y, z$   
**t** – время  
 **$\alpha$**  – поляризуемость молекулы (или коэффициент поглощения в среде)  
 **$\delta_{ij}$**  – символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 1$  для  $i = j$  и  $\delta_{ij} = 0$  для  $i \neq j$ )  
 **$\epsilon$**  – диэлектрическая проницаемость  
 **$\lambda$**  – длина световой волны ( $\lambda_0$  – длина световой волны в вакууме)  
 **$\mu$**  – магнитная проницаемость  
**v** – фазовая скорость света в веществе  
 **$v_{гр}$**  – групповая скорость света в веществе  
 **$\epsilon^{(n)}$**  – диэлектрическая восприимчивость  $n$ -го порядка  
 **$\omega$**  – круговая частота электромагнитных колебаний

# 1. Уравнения Максвелла в нелинейной среде.

## Нелинейная поляризация

Оптические эффекты, характер которых зависит от интенсивности излучения, называют *нелинейными*, а область оптики, изучающая нелинейные оптические эффекты (оптика мощных световых потоков), – *нелинейной оптикой*. В данном спецкурсе будет рассмотрен, в основном, именно этот аспект более общей проблемы *взаимодействия излучения с веществом*.

Примеры нелинейных явлений в оптике:

- Вынужденное комбинационное рассеяние света (наблюдение рассеяния света с частотами, несколько отличными от частоты монохроматического падающего излучения).
- Нелинейное отражение света (присутствие второй гармоники).
- Самофокусировка света.
- Самовоздействие света (изменение прозрачности среды, самообострение импульса, солитоны, сверхизлучение).
- Фотонное эхо.
- Электрооптические эффекты первого (эффект Поккельса) и второго (эффект Керра) порядков относительно приложенного поля (электрооптические затворы, модуляция света).
- Оптические гармоники в рассеянном свете.
- Многофотонные процессы (возбуждение уровней атомов и молекул с энергией, кратной энергии падающего излучения).

### 1.1. Макроскопическая нелинейная оптика

Взаимодействие света и вещества базируется на системе уравнений Максвелла для электрического  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и магнитного  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  полей. В рамках рассматриваемого курса практически не рассматриваются оптические эффекты, связанные с присутствием постоянного (или низкочастотного) магнитного поля. Поэтому при учете пространственной дисперсии результат усреднения (по объему, много большему характерных атомных размеров, но малому по сравнению с длиной волны) точных микроскопических уравнений Максвелла можно (см. [1], §103) формулировать (здесь и далее используем гауссову систему единиц) в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ст}}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{ст}}, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad (1.4)$$

где  $\rho_{\text{ст}}$  – плотность стороннего заряда,  $\mathbf{j}_{\text{ст}}$  – плотность постоянного тока,  $c$  – скорость света в вакууме. Индукция магнитного поля  $\mathbf{B}$  характеризует силовое действие магнитного поля на ток и, следовательно, является аналогом напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , которая характеризует силовое действие электрического поля на заряд. Напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  является аналогом индукции электрического поля  $\mathbf{D}$ . В приведенной выше формулировке макроскопических уравнений Максвелла (когда величина  $\mathbf{H}$  не вводится и формально магнитная проницаемость  $\mu \equiv 1$ ) все члены, возникающие в результате усреднения высокочастотных микроскопических токов, предполагаются включенными в определение индукции электрического поля  $\mathbf{D}$ . В связи с этим заметим также, что при частотах  $\omega$  порядка оптических (рассматриваемых в рамках курса), выделение такой независимой характеристики вещества, как магнитная проницаемость  $\mu(\omega)$  (в отличие от  $\epsilon(\omega)$ ) не столь очевидно ([1], §79).

Нелинейные свойства среды учитываются максвелловским материальным уравнением

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{E}). \quad (1.5)$$

Для решения электромагнитной задачи (1.1)–(1.4) с материальным уравнением (1.5) нужны соответствующие граничные условия и зависимость *поляризации* среды  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  для описания отклика среды на действие поля. Поскольку  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  связаны между собой уравнением (1.1), возможная зависимость  $\mathbf{P}$  от  $\mathbf{B}$  рассматривается как зависимость от пространственных производных  $\mathbf{E}$ , т.е. как одно из проявлений нелокальности.

Покажем, что в тривиальном (с точки зрения нелинейной оптики) случае, когда  $\mathbf{D} = \epsilon(\omega)\mathbf{E}$  и отсутствуют сторонние заряды  $\rho_{\text{ст}}$  и токи  $\mathbf{j}_{\text{ст}}$ , уравнения (1.1)–(1.5) допускают решение в виде плоской монохроматической волны



$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{E} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{B} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t).\end{aligned}$$

В этом случае из уравнений (1.1) и (1.2) следует

$$i\omega \mathbf{B} = c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad i\omega \mathbf{E} = -c \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.3) и (1.4) при этом выполняются автоматически, поскольку  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$  для произвольного вектора  $\mathbf{F}$ . Произведя в (1.6) дифференцирование по координатам с учетом равенства  $\operatorname{rot} \mathbf{E} \equiv \operatorname{rot}[\mathcal{E} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)] = i[\mathbf{k}\mathbf{E}]$  (см. приложение В), получим

$$\omega \mathbf{B} = c[\mathbf{k}\mathbf{E}], \quad \omega \mathbf{E} = -c[\mathbf{k}\mathbf{B}].$$

Исключая  $\mathbf{E}$  (или  $\mathbf{B}$ ) находим значение для волнового вектора  $\mathbf{k}$ :

$$\omega \mathbf{B} = -\frac{c^2}{\omega \epsilon} [\mathbf{k}[\mathbf{k}\mathbf{B}]] = -\frac{c^2}{\omega \epsilon} (\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{k}\mathbf{k})) = \frac{c^2}{\omega \epsilon} \mathbf{B}k^2,$$

т. е.

$$k^2 \equiv k'^2 - 2i\mathbf{k}'\mathbf{k}'' - k''^2 = \epsilon \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.7)$$

Можем видеть, что в случае комплексного  $\epsilon$  волновой вектор  $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}' - i\mathbf{k}''$  ( $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}''$  – соответственно действительная и мнимая компоненты  $\mathbf{k}$ ) также комплексная величина и электрическое поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E} \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$  может быть записано в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{r}) e^{i\psi},$$

где  $\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{E} \exp(-\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r})$  – амплитуда волны, а  $\psi = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t$  – фаза. Производная по времени и градиент фазы дают соответственно частоту  $\omega$  и волновой вектор  $\mathbf{k}'$  волны. Но в этом случае волна может быть названа "плоской" только в условном смысле (*неоднородная* плоская волна). Из вида поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E} \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$  следует, что плоскости, перпендикулярные вектору  $\mathbf{k}'$ , являются плоскостями постоянной фазы. Плоскостями постоянной амплитуды являются плоскости, перпендикулярные вектору  $\mathbf{k}''$ , в направлении которого происходит затухание волны. Что же касается поверхностей постоянного значения самого поля, то они в общем случае вообще не будут плоскими. С учетом (1.7) получим

$$\mathbf{B}^2 = \epsilon \mathbf{E}^2, \quad \mathbf{k}\mathbf{E} = \mathbf{k}\mathbf{B} = \mathbf{E}\mathbf{B} = 0. \quad (1.8)$$

Однако ввиду комплексности всех трех векторов  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  эти соотношения

в общем случае не имеют того наглядного смысла, который они имели бы для вещественных величин.

В важном случае распространения волны в непоглощающей (прозрачной) однородной среде

$$k = \sqrt{\epsilon} \frac{\omega}{c}, \quad \mathbf{B} = \sqrt{\epsilon} [\mathbf{E}], \quad (1.9)$$

где  $\mathbf{l}$  – орт в направлении  $\mathbf{k}$ .

## 1.2. Поляризация и восприимчивость вещества

Поляризация  $\mathbf{P}$  имеет физический смысл электрического момента единицы объема вещества и обычно является сложной нелинейной функцией  $\mathbf{E}$ . Как и поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , поляризация  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  является вещественной величиной. В линейном случае в однородном пространстве (нет выделенного начала координат) при условии стационарности (нет выделенного момента времени) отклик среды на электромагнитное поле принимает простой вид

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \mathbf{c}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - \tau) : \mathbf{E}(\mathbf{r}', \tau) d\mathbf{r}' d\tau, \quad (1.10)$$

где  $\mathbf{c}^{(1)}$  – линейная восприимчивость (тензор второго ранга). Если поле  $\mathbf{E}$  является плоской монохроматической волной

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{E}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t), \quad (1.11)$$

где  $\mathbf{k} = \sqrt{\epsilon(\omega)} \frac{\omega}{c} \mathbf{s}$  – волновой вектор излучения,  $\mathbf{s}$  – перпендикулярный волновому фронту единичный вектор, то с помощью преобразования Фурье уравнение (1.10) можно привести к известному виду

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{c}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) : \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega), \quad (1.12)$$

где коэффициент пропорциональности (линейная восприимчивость  $\mathbf{c}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$ ) определяется по формуле

$$\mathbf{c}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^t \int \mathbf{c}^{(1)}(\mathbf{r}, t) \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) d\mathbf{r} dt. \quad (1.13)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \int \int_0^\infty \mathbf{c}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - \tau) : \mathcal{Z}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - i\omega\tau) d\mathbf{r}' d\tau = \\
&= \int \int_0^\infty \mathbf{c}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - \tau) : \\
&\quad : \mathcal{Z}(\mathbf{k}, \omega) \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - i\omega(\tau - t)] \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) d\mathbf{r}' d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^t \int \mathbf{c}^{(1)}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{r}} + i\omega\tilde{t}) d\tilde{\mathbf{r}} d\tilde{t} : \mathcal{Z}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)
\end{aligned}$$

и, следовательно, для однородного случая справедливо (1.12) с (1.13).

Линейная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$  связана с линейной восприимчивостью  $\mathbf{c}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$  соотношением

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{1} + 4\pi\mathbf{c}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega). \quad (1.14)$$

В электрическом дипольном приближении  $\mathbf{c}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$  не зависит от  $\mathbf{r}$  и, следовательно,  $\mathbf{c}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$  и  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$  также не зависят от  $\mathbf{k}$ .

В нелинейном случае, когда поле  $\mathbf{E}$  является достаточно слабым, поляризацию  $\mathbf{P}$  можно разложить по степеням поля  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \int \int_0^\infty \mathbf{c}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - \tau) : \mathbf{E}(\mathbf{r}', \tau) d\mathbf{r}' d\tau + \\
&+ \int \int_0^\infty \mathbf{c}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - \tau_1; \mathbf{r} - \mathbf{r}_2, t - \tau_2) : \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, \tau_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, \tau_2) d\mathbf{r}_1 d\tau_1 d\mathbf{r}_2 d\tau_2 + \dots,
\end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $\mathbf{c}^{(n)}$  – нелинейная восприимчивость  $n$  порядка (тензор  $(n+1)$ -го ранга). Если поле  $\mathbf{E}$  может быть представлено набором плоских монохроматических волн

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \mathbf{E}(\mathbf{k}_i, \omega_i), \quad (1.16)$$

то, как и в линейном случае, применяя преобразование Фурье к уравнению (1.15), получим

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_i \mathbf{P}^{(i)}(\mathbf{k}, \omega), \quad (1.17)$$

где

$$\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{c}^{(1)}(\mathbf{k}, -\omega, \omega) : \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega),$$

$$\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{k}=\mathbf{k}_i+\mathbf{k}_j, \omega=\omega_i+\omega_j) = \mathbf{c}^{(2)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j, -\omega, \omega_i, \omega_j) : \mathbf{E}(\mathbf{k}_i, \omega_i) \mathbf{E}(\mathbf{k}_j, \omega_j), \quad (1.18)$$

$$\mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{k}=\mathbf{k}_i+\mathbf{k}_j+\mathbf{k}_k, \omega=\omega_i+\omega_j+\omega_k) =$$

$$= \mathbf{c}^{(3)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_k, -\omega, \omega_i, \omega_j, \omega_k) : \mathbf{E}(\mathbf{k}_i, \omega_i) \mathbf{E}(\mathbf{k}_j, \omega_j) \mathbf{E}(\mathbf{k}_k, \omega_k), \dots,$$

причем нелинейная восприимчивость  $n$ -го порядка  $\mathbf{c}^{(n)}$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n, -\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \\ = \int \int_0^\infty \mathbf{c}^{(n)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - \tau_1; \dots; \mathbf{r} - \mathbf{r}_n, t - \tau_n) \cdot \exp\{-i[\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - \omega_1(t - \tau_1) + \dots \\ \dots + \mathbf{k}_n \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) - \omega_n(t - \tau_n)]\} d\mathbf{r}_1 d\tau_1 \dots d\mathbf{r}_n d\tau_n. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Введение формального аргумента  $-\omega$  в определении  $\mathbf{c}^{(n)}$  в (1.19) (так что сумма всех частот равна нулю) упрощает рассмотрение свойств симметрии. В электрическом дипольном приближении  $\mathbf{c}^{(n)}(\mathbf{r}, t)$  не зависит от  $\mathbf{r}$  и, следовательно,  $\mathbf{c}^{(n)}(\mathbf{k}, \omega)$  не зависит от  $\mathbf{k}$ . С точки зрения физики  $\mathbf{c}^{(n)}$  связана с микроскопической структурой среды и может быть адекватно оценена только с помощью строгого квантовомеханического расчета (или эксперимента). Тем не менее, для оценки  $\mathbf{c}^{(n)}$  часто используют простые модели, в частности, модель ангармонического осциллятора и модель газа свободных электронов.

Характерные значения восприимчивостей диэлектриков составляют

$$\chi^{(1)} \approx 1, \quad \chi^{(2)} \approx 10^{-10} \div 10^{-9} \text{ см/В}, \quad \chi^{(3)} \approx 10^{-18} \div 10^{-17} \text{ см}^2/\text{В}^2$$

и позволяют заключить, что для типичных значений напряженности лазерного излучения ( $<10^8$  В/см) нелинейные поправки в разложении (1.17) уменьшаются по величине и, следовательно, при отсутствии резонансных взаимодействий разложение (1.17) (и (1.15)) имеет смысл.

### 1.3. Плотность потока электромагнитной энергии

Ключевой физической параметр в нелинейной оптике – плотность потока электромагнитной энергии вектор Пойтинга, в гауссовой системе единиц имеет вид

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (1.20)$$

Все переменные и параметры, входящие в уравнения (1.1)–(1.5) и

(1.20), являются вещественными величинами. В связи с этим следует иметь в виду, что при переходе в этих уравнениях к электрическим  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и магнитным  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  полям в комплексной форме записи при вычислении нелинейных зависимостей надо, разумеется, сначала отделить вещественную часть. Но если нас интересует только среднее (по времени) произведения двух величин  $a$  и  $b$ , пропорциональных  $e^{-i\omega t}$ , то его можно вычислить как  $\frac{1}{2} \text{Re}(ab^*)$ . Действительно

$$\overline{\left(\frac{a+a^*}{2}\right)\left(\frac{b+b^*}{2}\right)} = \frac{1}{4}(ab^* + a^*b) = \frac{1}{2} \text{Re}(ab^*).$$

В частности, среднее значение по времени вектора Пойтинга  $\bar{\mathbf{S}}$  можно вычислить согласно формуле

$$\bar{\mathbf{S}} = \text{Re}\left(\frac{c}{8\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]\right). \quad (1.21)$$

В однородной непоглощающей среде согласно (1.9) имеем

$$\bar{S} = \frac{c\sqrt{\epsilon}}{8\pi} \mathbf{E}\mathbf{E}^* = \frac{c\sqrt{\epsilon}}{8\pi} |\mathbf{E}|^2. \quad (1.22)$$

## 1.4. Энергия поля в среде

Формула (1.20) для плотности потока энергии остается справедливой в любых переменных полях, в том числе и при наличии дисперсии. Это ясно из того, что формула (1.20) однозначно следует из условия непрерывности нормальной составляющей на границе тела и из того, что она справедлива в пустоте вне тела.

Изменение энергии, сосредоточенной в единице объема тела, вычисляется как  $\text{div}(\mathbf{S})$ . С учетом уравнений Максвелла и правила  $\tilde{\mathbf{N}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{H})$  (см. приложение В) можем получить закон сохранения энергии

$$-\text{div}(\mathbf{S}) = \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right). \quad (1.23)$$

В диэлектрической среде в отсутствии дисперсии, когда  $\epsilon$  и  $\mu$  являются вещественными величинами (для общности, в этом параграфе сохраним параметр  $\mu$  и будем различать  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ), эту величину можно рассматривать как изменение электромагнитной энергии

$$U = \frac{1}{8\pi} (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2), \quad (1.24)$$

имеющей точный термодинамический смысл: это есть разность между

внутренней энергией  $1 \text{ см}^3$  при наличии поля и энергией в отсутствии поля при тех же плотности и энтропии.

При наличии дисперсии такое простое толкование невозможно, поскольку одновременно происходит и диссипация энергии и ее поглощение. Усредняя (1.23) по времени, определим среднее количество тепла  $Q$ , выделяющегося в  $1 \text{ с}$  в  $1 \text{ см}^3$  среды. Если пользоваться комплексным представлением величин, то в (1.23) надо подставить для  $\mathbf{E}$  и  $\partial \mathbf{D}/\partial t$  соответственно величины

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}(-i\omega\epsilon\mathbf{E} + i\omega\epsilon^*\mathbf{E}^*)$$

и аналогично для  $\mathbf{H}$  и  $\partial \mathbf{B}/\partial t$ . С учетом  $\overline{\mathbf{E}\mathbf{E}} = \overline{\mathbf{E}^*\mathbf{E}^*} = 0$  получим

$$\begin{aligned} Q = -\overline{\text{div}(\mathbf{S})} &= \frac{-i\omega}{16\pi} \left[ \overline{(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)(\epsilon\mathbf{E} - \epsilon^*\mathbf{E}^*)} + \overline{(\mathbf{H} + \mathbf{H}^*)(\mu\mathbf{H} - \mu^*\mathbf{H}^*)} \right] = \\ &= \frac{-i\omega}{16\pi} \left[ (\epsilon - \epsilon^*)\overline{\mathbf{E}\mathbf{E}^*} + (\mu - \mu^*)\overline{\mathbf{H}\mathbf{H}^*} \right] = \frac{\omega}{8\pi} (\epsilon''|\mathbf{E}|^2 + \mu''|\mathbf{H}|^2), \end{aligned} \quad (1.25)$$

где  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon'' = 1 + 4\pi\chi^{(1)}$ ,  $\mu = \mu' + i\mu''$ . Это выражение можно написать также в виде

$$-\overline{\text{div}(\mathbf{S})} \equiv Q = \frac{\omega}{4\pi} (\epsilon''\overline{\mathbf{E}^2} + \mu''\overline{\mathbf{H}^2}),$$

где  $\overline{\mathbf{E}^2}$  и  $\overline{\mathbf{H}^2}$  средние по времени от квадратов вещественных напряженностей поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Области частот, в которых  $\epsilon''$  и  $\mu''$  очень малы (по сравнению с  $\epsilon'$  и  $\mu'$ ), называют областями прозрачности вещества. Пренебрегая поглощением, в этих областях и в присутствии дисперсии оказывается возможным ввести понятие о внутренней энергии тела в электромагнитном поле. Рассмотрим поле, представляющее собой совокупность "почти" монохроматических компонент типа

$$\mathbf{E} = \mathcal{E}(t)\exp(-i\omega_0 t), \quad \mathbf{H} = \mathcal{H}(t)\exp(-i\omega_0 t),$$

где  $\mathcal{E}(t)$  и  $\mathcal{H}(t)$  медленно меняющиеся функции времени. Используя разложение Фурье, запишем  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_\alpha \exp(-i\alpha t) + \dots$ , где  $\alpha \ll \omega$ . Тогда

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{D}}(t) &\simeq -i\omega_0\varepsilon(\omega_0)\mathcal{E}_0\exp(-i\omega_0 t) - i(\omega_0 + \alpha)\varepsilon(\omega_0 + \alpha)\mathcal{E}_\alpha\exp(-i(\omega_0 + \alpha)t) \simeq \\
&\simeq -i\omega_0\varepsilon(\omega_0)[\mathcal{E}_0\exp(-i\omega_0 t) + \mathcal{E}_\alpha\exp(-i(\omega_0 + \alpha)t)] - \\
&- i\left[\alpha\varepsilon(\omega_0) + i\omega_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega_0}\alpha\right]\frac{1}{-i\alpha}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}\exp(-i\omega_0 t) \simeq \\
&\simeq -i\omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E} + \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}\exp(-i\omega t).
\end{aligned}$$

Здесь в последней строке индекс 0 у  $\omega_0$  опущен. Подставив это выражение в правую часть (1.23) (мнимой частью  $\varepsilon(\omega)$  пренебрегаем) и, усредняя по времени, получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi}\overline{\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}} &= \frac{1}{16\pi}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)(\dot{\mathbf{D}} + \dot{\mathbf{D}}^*) \simeq \frac{1}{16\pi}(\overline{\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}^*} + \overline{\mathbf{E}^*\dot{\mathbf{D}}}) \simeq \\
&\simeq \frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\left(\mathcal{E}\frac{\partial\mathcal{E}^*}{\partial t} + \mathcal{E}^*\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\mathbf{E}^*).
\end{aligned}$$

Прибавив аналогичное выражение с магнитным полем, приходим к выводу, что скорость систематического изменения энергии 1 см<sup>3</sup> среды дается выражением  $d\bar{U}/dt$ , где

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{d(\omega\varepsilon')}{d\omega}\mathbf{E}\mathbf{E}^* + \frac{d(\omega\mu')}{d\omega}\mathbf{H}\mathbf{H}^*\right]. \quad (1.26)$$

Учет мнимой части  $\varepsilon$  привел бы к сохранению слагаемого (1.25) и формулировке закона сохранения энергии в виде

$$\overline{\text{div}(\mathbf{S})} = -\frac{\partial\bar{U}}{\partial t} - Q. \quad (1.27)$$

*Замечание 1.* Поскольку уравнения (1.1)–(1.5) и (1.20) записаны в гауссовой системе, все величины, входящие в эти уравнения, должны быть выражены в СГСЭ: время – в с, расстояние – в см, энергия – в эрг, напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  – в ед. СГСЭ, плотность потока электромагнитной энергии  $\mathbf{S}$  – в эрг/с/см<sup>2</sup> и т. д. При этом любая комбинация сомножителей в единицах СГСЭ может быть снова обозначена как ед. СГСЭ, обычно допускающая переосмысление также и через с, см, эрг и т. п. в соответствии с физическим смыслом.

*Пример 1.1.* Оценим амплитуду электрического поля  $E \equiv |\mathbf{E}|$  для излучения со средней интенсивностью  $I = 100$  кВт/см<sup>2</sup>. Согласно (1.22) амплитуда поля  $E$  равна

$$E = \sqrt{\frac{8\pi I}{c}} = \sqrt{\frac{8\pi 10^5 \cdot 10^7 [\text{эрг/с/см}^2]}{3 \cdot 10^{10} [\text{см/с}]}]} = 28.9 \left[ \frac{\text{эрг}^{1/2}}{\text{см}^{3/2}} \right] \equiv 28.9 [\text{ГСЦЭ}],$$

что соответствует в СИ  $E = ((300 \text{ В/см})/\text{ГСЦЭ}) \cdot (28.9 \text{ ГСЦЭ}) = 8.67 \text{ кВ/см}$ .

*Пример 1.2.* Оценим интенсивность лазерного излучения, когда поле **Е** в пучке становится сопоставимым с внутриатомным и разложение поляризации **Р** по степеням поля **Е** теряет смысл. Внутриатомное поле для атома водорода согласно интегральной форме уравнения (1.3) (см. приложение Г) составляет  $E_a = \frac{e}{a_0^2}$ , где  $a_0 \equiv \frac{\hbar^2}{me^2} \simeq 0.53 \cdot 10^{-8} \text{ см}$  – боровский радиус. Следовательно, электрическое поле на первой боровской орбите

$$E_a \simeq \frac{4.8 \cdot 10^{-10} \text{ ГСЦЭ}}{(0.53 \cdot 10^{-8} \text{ см})^2} \simeq 1.7 \cdot 10^7 \text{ ГСЦЭ} \simeq \underset{1 \text{ ГСЦЭ} \simeq 300 \text{ В/см}}{5.1 \cdot 10^9 \text{ В/см}}.$$

Тогда, полагая амплитуду поля **Е** в пучке равной  $E_a$ , получим соответствующую плотность потока энергии  $|\vec{S}| \simeq \frac{c}{8\pi} E_a^2 = \frac{3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}}{8\pi} (1.7 \cdot 10^7 \text{ ГСЦЭ})^2 = 3.5 \cdot 10^{23} \text{ ГСЦЭ} = 3.5 \cdot 10^{23} \text{ эрг/с/см}^2 = 3.5 \cdot 10^{16} \text{ Вт/см}^2$ .

*Задача 1.1.* Оценить плотность потока энергии  $I$  лазерного излучения, при которой происходит электрический пробой сухого очищенного от пыли воздуха. Какая при этом амплитуда напряженности электрического поля  $E_0$ ? Какой мощности  $P$  лазера это соответствует, если лазерный луч имеет диаметр  $d = 0.3 \text{ мм}$ ? Длина волны излучения  $\lambda \simeq 10.6 \text{ мкм}$  ( $\text{CO}_2$ -лазер), длительность импульса  $\tau_{\text{имп}} = 1 \text{ мкс}$ , ионизация в сухом воздухе происходит при энергии электронов  $U \simeq 12 \text{ эВ}$ , длина свободного пробега электронов  $l \simeq 3 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ .

*Задача 1.2.* Оценить интенсивность лазерного излучения  $I$  (и соответствующую ей напряженность электрического поля  $E$ ), когда проявляются нелинейные свойства вакуума, сопровождающиеся образованием электрон-позитронных пар.



## 2. Общие свойства восприимчивостей

### 2.1. Классификация сред

Отклик среды на действие поля описывается материальным уравнением (1.5), связывающим индукцию электрического поля  $\mathbf{D}$  с электрическим полем  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{E}),$$

где  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  – *поляризация* среды. Формальную классификацию сред проведем на основе уравнения

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}).$$

*Линейными* называются среды, в которых зависимость поляризации от поля выражается линейным оператором:

$$\mathbf{P} = \hat{L}(\mathbf{E}).$$

Оператор  $\hat{L}$  может быть, в частности, линейным запаздывающим функционалом или тензорным оператором. Соответственно, *нелинейными* называются среды, в которых зависимость  $\mathbf{P}$  от  $\mathbf{E}$  нелинейна:

$$\mathbf{P} = \widehat{NL}(\mathbf{E}).$$

*Изотропными* называют среды, в которых нет выделенных направлений и, следовательно, поляризация ориентирована параллельно полю:

$$\mathbf{P} \uparrow\uparrow \mathbf{E}.$$

В *анизотропных* средах вектор  $\mathbf{P}$ , вообще говоря, не параллелен вектору  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{P} \nparallel \mathbf{E}.$$

Среды, в которых зависимость  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  является локальной и безынерционной, т. е. значение поляризации среды в некоторой точке пространства и в некоторый момент времени определяется значением поля в той же самой точке и в тот же момент, называются *недиспергирующими*. Нелокальность отклика приводит к *пространственной дисперсии*, а его инерционность, т. е. запаздывание  $\mathbf{P}$  относительно  $\mathbf{E}$ , к *временной (или частотной) дисперсии*.

При наличии пространственной дисперсии диэлектрическая

проницаемость является тензором (а не скаляром) даже в изотропных средах: выделенное направление создается волновым вектором. В большинстве случаев пространственная дисперсия приносит существенно меньшие поправки, чем временная. Но эти поправки могут приводить к качественно новым физическим явлениям и поэтому могут быть существенны. О средах с отличными от нуля линейными членами в разложении диэлектрического тензора по степеням волнового вектора  $\mathbf{k}$  говорят, что они обладают *естественной оптической активностью*. При распространении в естественно-активной среде линейно поляризованной волны происходит вращение ее плоскости поляризации. Естественная активность может проявляться у изотропных сред, содержащих стереоизомеры, но исключается наличием центра симметрии.

Оптические свойства кристаллов зависят в первую очередь от симметрии его диэлектрического тензора  $\epsilon_{ij} = 1 + 4\pi\chi_{ij}$ . В этом отношении все кристаллы делятся на три категории – кубические, одноосные и двухосные.

В кристалле *кубической* системы  $\epsilon_{ij} = \epsilon\delta_{ij}$ , причем направления главных осей вполне произвольны. Поэтому в отношении своих оптических свойств кубические кристаллы не отличаются от изотропных тел.

К *одноосным* относятся кристаллы ромбоэдрической, тетрагональной и гексагональной систем. Одна из главных осей тензора  $\epsilon_{ij}$  совпадает здесь с осью симметрии соответственно третьего, четвертого или шестого порядка; эту ось называют в оптике *оптической осью* кристалла. Направления же двух других главных осей произвольны, а соответствующие главные значения диэлектрического тензора совпадают (ниже они обозначены  $\epsilon_{\perp}$ ). В зависимости от того,  $\epsilon_{\perp} > \epsilon_{\parallel}$  или  $\epsilon_{\perp} < \epsilon_{\parallel}$ , одноосные кристаллы называют соответственно *отрицательными* или *положительными*.

У *двухосных* кристаллов все три главных значения тензора  $\epsilon_{ij}$  различны.

Среды, в которых диэлектрическая проницаемость вещественна и положительна, будем называть *прозрачными*.

## 2.2. Перестановочная симметрия нелинейных восприимчивостей

Микроскопические выражения для восприимчивостей имеют

внутреннюю симметрию. Сначала рассмотрим только частотный аспект симметрии.

**I.** Из определения линейной восприимчивости (1.13) следует универсальное свойство

$$\chi_{ij}^*(-\omega, \omega) = \chi_{ij}(\omega, -\omega). \quad (2.1)$$

Это равенство является частным случаем соотношения Онзагера. На самом деле, аналогичное соотношение справедливо в общем случае:

$$c^{(n)*}(-\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = c^{(n)}(\omega, -\omega_1, -\omega_2, \dots, -\omega_n). \quad (2.2)$$

Действительно,

$$\mathbf{P}(\omega) = c^{(n)}(-\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) : \mathbf{E}(\omega_1) \mathbf{E}(\omega_2) \dots \mathbf{E}(\omega_n),$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}^*(\omega) = c^{(n)*}(-\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) : \mathbf{E}^*(\omega_1) \mathbf{E}^*(\omega_2) \dots \mathbf{E}^*(\omega_n),$$

но, с другой стороны, из вещественности поляризации и поля следуют

$$\mathbf{P}^*(\omega) = \mathbf{P}(-\omega) = c^{(n)}(\omega, -\omega_1, -\omega_2, \dots, -\omega_n) : \mathbf{E}(-\omega_1) \mathbf{E}(-\omega_2) \dots \mathbf{E}(-\omega_n),$$

$$\mathbf{E}^*(\omega_n) = \mathbf{E}(-\omega_n).$$

Из сравнения двух вариантов записи  $\mathbf{P}^*(\omega)$  получаем (2.2). Отметим, что принцип Онзагера справедлив только в отсутствии магнитного поля.

**II.** Далее, ввиду симметрии, с которой входят  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  в определение поляризации  $\mathbf{P}^{(2)}$ , тензор  $\chi_{\alpha ij}$  симметричен по всем индексам, кроме первого, при одновременной перестановке его аргументов (*внутренняя перестановочная симметрия*):

$$\chi_{\alpha ij}(-\omega, \omega_1, \omega_2) = \chi_{\alpha ji}(-\omega, \omega_2, \omega_1). \quad (2.3)$$

Согласно (2.3) число независимых компонент тензора  $c^{(2)}$  не должно превышать 18.

**III.** Кроме того, в нерезонансных случаях (нет резонансов между переходами в веществе и частотами или комбинациями частот падающего или генерируемого излучения) можно произвольным образом переставлять индексы вместе с такой же перестановкой аргументов (*полная перестановочная симметрия*):

$$\chi_{\alpha ij}(-\omega, \omega_1, \omega_2) = \chi_{ij\alpha}(\omega_1, \omega_2, -\omega) = \chi_{j\alpha i}(\omega_2, -\omega, \omega_1), \quad (2.4)$$

с уточнением нормировки восприимчивостей в вырожденном случае (в силу выбранных в данном курсе обозначений перестановка полей с

одинаковыми частотами не должна давать дополнительных вкладов в поляризацию  $\mathbf{P}^{(n)}$ ):

$$\chi_{\alpha ij}(-2\omega, \omega, \omega) = \frac{1}{2} \chi_{ij\alpha}(\omega, \omega, -2\omega) = \frac{1}{2} \chi_{j\alpha i}(\omega, -2\omega, \omega). \quad (2.5)$$

Поскольку в нерезонансных случаях можно пренебречь затуханием и, следовательно, нелинейные восприимчивости действительны, (2.4) может быть записано также в виде

$$\chi_{\alpha ij}(-\omega, \omega_1, \omega_2) = \chi_{ij\alpha}(-\omega_1, -\omega_2, \omega) = \chi_{j\alpha i}(-\omega_2, \omega, -\omega_1).$$

Соотношения (2.4)–(2.5) позволяют в нерезонансных случаях ограничиться единственным тензором восприимчивости второго порядка  $\chi^{(2)}$  (вместо трех) для полного описания трехволнового взаимодействия.

В статическом случае, т. е. когда обе частоты,  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , стремятся к нулю, тензор  $\chi_{\alpha ij}$  оказывается полностью симметричным.

Если одна из частот не равна нулю, то

$$\chi_{\alpha ij}(-\omega, \omega, 0) = \chi_{ji\alpha}(0, \omega, -\omega), \quad (2.6)$$

причем в рассматриваемом нерезонансном случае восприимчивость  $\chi_{\alpha ij}(-\omega, \omega, 0)$  не только вещественна, но и четна по  $\omega$ . Тензор  $\chi_{\alpha ij}(-\omega, \omega, 0)$  описывает линейный электрооптический эффект (эффект Погекельса) – изменение проницаемости кристалла под влиянием постоянного электрического поля, и он симметричен по индексу  $\alpha i$ :

$$\chi_{\alpha ij}(-\omega, \omega, 0) = \chi_{i\alpha j}(-\omega, \omega, 0).$$

Тензор  $\chi_{ji\alpha}(0, \omega, -\omega)$  описывает другой эффект – появление в среде статической диэлектрической поляризации, пропорциональной квадрату приложенного электрического поля ("оптическое детектирование"). Равенство (2.6) устанавливает, таким образом, связь между двумя этими эффектами.

**IV.** Если можно пренебречь также дисперсией  $\chi^{(n)}$ , то перестановочная симметрия становится не зависящей от частот. Следовательно, частотные аргументы можно переставлять произвольно и  $\chi_{i_1 i_2 \dots i_n}$  не меняется при перестановке декартовых индексов. Это свойство известно как *соотношения Клеймана*. При их учете число независимых элементов  $\chi^{(n)}$  резко сокращается. Например, число независимых элементов  $\chi^{(2)}$  уменьшается с 27 до 10. Действительно, симметрия накладывает 17 связей:

$$\chi_{xyz} = \chi_{xzy} = \chi_{yxz} = \chi_{yzx} = \chi_{zxy} = \chi_{zyx},$$

$$\chi_{xyy} = \chi_{yxy} = \chi_{yyx}, \quad \chi_{xzz} = \chi_{zxz} = \chi_{zzx},$$

$$\chi_{yxx} = \chi_{xyx} = \chi_{xxy}, \quad \chi_{yzz} = \chi_{zyz} = \chi_{zzz},$$

$$\chi_{zxx} = \chi_{xzx} = \chi_{xxz}, \quad \chi_{zyy} = \chi_{yzy} = \chi_{yyz}.$$

Однако следует заметить, что, поскольку все среды обладают дисперсией, соотношения Клейнмана являются хорошим приближением только тогда, когда все частоты, находящиеся во взаимодействии, находятся далеко от резонансов, так что дисперсия  $\epsilon^{(n)}$  не важна.

Можно показать, что свойства II и III справедливы (как и свойства I и IV) и в общем случае для нелинейной восприимчивости  $n$ -го порядка, с теми же оговорками.

### 2.3. Пространственная симметрия нелинейных восприимчивостей

Будучи оптическими характеристиками среды, тензоры нелинейных восприимчивостей должны обладать определенной симметрией, отражающей структурную симметрию среды. Согласно *принципу Неймана*, симметрия макросвойства не ниже симметрии структуры (группа симметрии свойства должна включать все элементы симметрии структуры). Преобразования пространства приводят к преобразованию физических систем. Если при преобразовании физической системы преобразованная система имеет свойства, тождественные свойствам исходной, то такое преобразование называют *преобразованием симметрии*. *Точечным преобразованием симметрии* называют такое преобразование, при котором хотя бы одна точка преобразуется сама в себя. Она принимается обычно за начало координат. Существует 14 типов точечных групп. Кристаллические решетки обладают *трансляционной симметрией*, когда любая физическая величина  $s$  остается неизменной при переносе пространства кристалла на определенные расстояния вдоль определенных направлений.

Рассмотрим преобразование поляризации первого порядка (*линейная поляризуемость*) при смене координат. Пусть

$$P_\alpha = \chi_{\alpha\beta} E_\beta.$$

Тогда поляризация в новой системе координат запишется с использованием направляющих косинусов  $c_{\alpha\beta}$  (см. (A.5) в приложении A) в виде

$$P'_\alpha = c_{\alpha\beta} P_\beta = c_{\alpha\beta} \chi_{\beta\gamma} E_\gamma = c_{\alpha\beta} \chi_{\beta\gamma} c_{\delta\gamma} E'_\delta = \chi'_{\alpha\delta} E'_\delta$$

и, следовательно,

$$\chi'_{\alpha\delta} = c_{\alpha\beta} \chi_{\beta\gamma} c_{\delta\gamma} \quad (2.7)$$

в полном соответствии с (Б.2). Приведенный порядок сомножителей в (2.7) позволяет легко восстановить матричную форму этого выражения

$$\mathbf{c}' = \mathbf{C} \mathbf{c} \mathbf{C}^T, \quad (2.8)$$

где матрица  $\mathbf{C} = (c_{\alpha\beta})$ .

При преобразовании симметрии тензор должен остаться неизменным (т. е.  $\mathbf{c}' = \mathbf{c}$ ) и, следовательно, с учетом свойства  $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T$  (см. (А.2)) согласно (2.8) должно выполняться равенство

$$\mathbf{C} \mathbf{c} = \mathbf{c} \mathbf{C}, \quad (2.9)$$

налагающее определенные ограничения на элементы восприимчивости первого порядка  $\mathbf{c}$ .

Рассмотрим *квадратичную поляризуемость*

$$P_\alpha = \chi_{\alpha\beta\gamma} E_\beta E_\gamma. \quad (2.10)$$

В этом случае для нелинейной поляризации второго порядка в новой системе координат можем записать

$$P'_\alpha = c_{\alpha\beta} P_\beta = c_{\alpha\beta} \chi_{\beta\gamma\delta} E_\gamma E_\delta = c_{\alpha\beta} \chi_{\beta\gamma\delta} c_{i\gamma} c_{j\delta} E'_i E'_j = \chi'_{\alpha ij} E'_i E'_j,$$

откуда следует соотношение, связывающее тензор третьего ранга в новой и старой системах координат

$$\chi'_{\alpha ij} = c_{\alpha\beta} \chi_{\beta\gamma\delta} c_{i\gamma} c_{j\delta}, \quad (2.11)$$

или в матричной форме (см. (Б.9))

$$\mathbf{c}^{(2)'} = \mathbf{C} \mathbf{c}^{(2)} \mathbf{C}^T \mathbf{C}^T. \quad (2.12)$$

При преобразовании симметрии  $\mathbf{c}^{(2)'} = \mathbf{c}^{(2)}$  и (2.11) налагает определенные ограничения на элементы восприимчивости второго порядка  $\mathbf{c}^{(2)}$ . Например, для инверсных сред (т. е. кристаллов с центром симметрии, а также газов и жидкостей), когда направляющие косинусы  $c_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$ ,  $\delta_{\alpha\beta}$  – символ Кронекера (см. (А.4)), из (2.11) сразу следует, что для тензоров третьего ранга должно выполняться  $\chi_{\beta\gamma\delta} = -\chi_{\beta\gamma\delta}$ , т. е. квадратичная восприимчивость (дипольная поправка)  $\mathbf{c}^{(2)} = 0$ :

$$\chi'_{\alpha ij} = c_{\alpha\beta} \chi_{\beta\gamma\delta} c_{i\gamma} c_{j\delta} = -\delta_{\alpha\beta} \chi_{\beta\gamma\delta} \delta_{i\gamma} \delta_{j\delta} = -\chi_{\alpha\gamma\delta} \delta_{i\gamma} \delta_{j\delta} = -\chi_{\alpha ij}.$$

Этот результат можно получить и из (2.12), если учтем, что

$$\mathbf{C} = -(\delta_{\alpha\beta}) \rightarrow \mathbf{C}^T = \mathbf{C}, \quad \mathbf{C}^T \mathbf{C}^T = (\delta_{\alpha\beta}).$$

Впрочем, равенство нулю восприимчивости четного порядка  $2n$  непосредственно следует из определения поляризации: при инверсии любой вектор, в том числе поляризация в левой части (2.10), меняет знак, но правая часть зависит от произведения четного количества  $\mathbf{E}_k$  и, следовательно, знака не меняет. Для сред с центром симметрии это возможно только при равенстве нулю всех дипольных восприимчивостей:  $\mathbf{c}^{(2n)} = 0$ . Данные ограничения не распространяются на квадрупольные восприимчивости, поэтому эффекты второго порядка, обусловленные этими членами, могут наблюдаться и в centrosymmetric средах (квадрупольная поправка является тензором четвертого (четного) ранга и не зануляется).

*Пример 2.1.* В качестве простого примера, иллюстрирующего взаимосвязь между свойствами симметрии среды и видом тензора восприимчивости первого порядка  $\mathbf{c}$ , рассмотрим кристалл, обладающий осью симметрии  $n$ -го порядка ( $C_n$ ), и пусть этой осью является ось  $z$ . Сразу заметим (см. (A.3)), что в случае поворота на угол  $\phi$  вокруг оси  $z$  матрица косинусов имеет вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \widehat{\cos x', x} & \widehat{\cos x', y} & \widehat{\cos x', z} \\ \widehat{\cos y', x} & \widehat{\cos y', y} & \widehat{\cos y', z} \\ \widehat{\cos z', x} & \widehat{\cos z', y} & \widehat{\cos z', z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При вращении на угол  $2\pi/n$  относительно оси симметрии характеристики среды не меняются и, следовательно,  $\mathbf{c}' = \mathbf{c}$ . Для частного случая  $n = 4$   $\phi = 2\pi/n = \pi/2$  и согласно (2.9) должно выполняться

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получим

$$\begin{pmatrix} \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ -\chi_{xx} & -\chi_{xy} & -\chi_{xz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\chi_{xy} & \chi_{xx} & \chi_{xz} \\ -\chi_{yy} & \chi_{yx} & \chi_{yz} \\ -\chi_{zy} & \chi_{zx} & \chi_{zz} \end{pmatrix}.$$

Это система из девяти уравнений, из которых только шесть независимы. Решение дает

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ -\chi_{xy} & \chi_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix},$$

где независимых переменных только три.

*Пример 2.2.* Определим тензор квадратичной восприимчивости  $\mathbf{c}^{(2)}$  у кристалла KDP, обладающего симметрией  $\bar{4}2\mathbf{m}$  (тетрагональная сингония).

В общем виде тензор третьего ранга  $\mathbf{c}^{(2)}$  имеет  $2^3=27$  компонент ("кубик"  $3 \times 3 \times 3$ ). Рассмотрим первый слой такого кубика

$$\begin{pmatrix} \chi_{111} & \chi_{112} & \chi_{113} \\ \chi_{121} & \chi_{122} & \chi_{123} \\ \chi_{131} & \chi_{132} & \chi_{133} \end{pmatrix}.$$

В силу симметрии по двум последним индексам имеем следующие соотношения между компонентами:  $\chi_{112} = \chi_{121}$ ,  $\chi_{113} = \chi_{131}$ ,  $\chi_{123} = \chi_{132}$  и аналогично для двух других слоев. Тогда остается 18 независимых компонент. Рассмотрим далее ограничения за счет кристаллической симметрии. В тетрагональной сингонии первая позиция отвечает направлению  $[001]$ , вторая –  $[100]$ , третья –  $[110]$ .

**Операция  $\bar{4}$ .** Симметрия относительно оси четвертого порядка с инверсией ( $z$  параллельна этой оси) – поворот на  $\pi/2$  вокруг оси  $z$  и смена знаков всех осей (инверсия), выписываем только независимые компоненты:



$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow -2 \\ 2 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow -3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi_{111} = -\chi_{222} = -\chi_{111} \equiv 0 \\ \chi_{112} = \chi_{221} = -\chi_{112} \equiv 0 \\ \chi_{113} = -\chi_{223} \\ \chi_{122} = -\chi_{211} = -\chi_{122} \equiv 0 \\ \chi_{123} = \chi_{213} \\ \chi_{133} = -\chi_{233} = -\chi_{133} \equiv 0 \\ \chi_{311} = -\chi_{322} \\ \chi_{313} = -\chi_{323} = -\chi_{313} \equiv 0 \\ \chi_{333} = -\chi_{333} \equiv 0 \end{array} \right. .$$

11 независимых компонент стали нулевыми (всего 15 нулевых с учетом симметрии по двум последним индексам) и 3 компоненты стали зависимыми, т. е. осталось 12 ненулевых компонент и из них только 4 независимых.

**Операция 2.** Поворот на  $\pi$  относительно оси второго порядка, параллельной  $x$ , выписываем только независимые компоненты:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow -2 \\ 3 \rightarrow -3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi_{113} = -\chi_{113} \equiv 0 \\ \chi_{311} = -\chi_{311} \equiv 0 \end{array} \right. .$$

2 независимые компоненты стали нулевыми (всего 21 нулевых) и в итоге имеем 6 ненулевых компонент и только 2 из них независимы:  $\chi_{123} = \chi_{132} = \chi_{213} = \chi_{231}, \chi_{312} = \chi_{321}$ .

Иногда компоненты тензора восприимчивости второго порядка представляют в виде пьезоматрицы размером  $3 \times 6$ , у элементов которого первый индекс остается прежним, как в тензорных обозначениях, а второй индекс составлен из второго и третьего индекса тензора по схеме

$$11 \rightarrow 1; \quad 22 \rightarrow 2; \quad 33 \rightarrow 3; \quad 23, 32 \rightarrow 4; \quad 31, 13 \rightarrow 5; \quad 12, 21 \rightarrow 6.$$

Например,

$$d_{14} = \chi_{123}, \quad d_{25} = \chi_{213}, \quad d_{36} = \chi_{312},$$

и, следовательно, пьезоматрица для кристалла KDP имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25}=d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}.$$

Для кристалла KDP экспериментально на длине волны излучения  $\lambda = 1.064$  мкм получены следующие значения для ненулевых элементов пьезоматрицы:  $d_{36} = (1.1 \pm 0.3) \cdot 10^{-9}$  СГСЭ,  $d_{14} = (0.95 \pm 0.06)d_{36}$ .

*Задача 2.1.* Определить тензор квадратичной восприимчивости  $\epsilon^{(2)}$  у кристалла цинковой обманки, обладающего симметрией  $\bar{4}3m$  (кубическая сингония – оптически изотропна, но не имеет центра симметрии).

*Задача 2.2.* Определить вид тензора линейной восприимчивости  $\chi_{ij}$ , если поляризация  $\mathbf{P}$  ( $P_i = \chi_{ij}E_j$ ) ориентирована параллельно электрическому полю  $\mathbf{E}$ .

*Задача 2.3.* Тензор диэлектрической проницаемости для кристалла имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приведите этот тензор (симметричный) к главным осям.

### 3. Классические модели оптического ангармонизма

#### 3.1. Газ свободных электронов как модель нелинейной поляризуемости

Чтобы проиллюстрировать появление нелинейной зависимости поляризации от электрического поля, вычислим ее в рамках простой классической задачи. Рассмотрим газ электронов в электромагнитном поле. Уравнение движения для электрона с учетом силы Лоренца запишем в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{e}{m} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right), \quad (3.1)$$

где элементарный заряд  $e > 0$ ,  $m$  – масса электрона,  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  – скорость электрона,  $\gamma$  – феноменологически введенное затухание осциллирующего движения электронов (например,  $\gamma = 1/\tau$ , где  $\tau$  – феноменологическое время между столкновениями). Рассмотрим случай, когда электромагнитное поле представляет собой плоскую монохроматическую волну, линейно поляризованную вдоль оси  $x$  и имеющий волновой вектор  $\mathbf{k}$ , параллельный оси  $z$ . Тогда

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, 0), \quad \mathbf{H} = (0, H_y, 0), \quad E_x = H_y = E,$$

где

$$E \equiv E_x(z, t) = \text{Re}[\mathcal{E}(k, z) \exp(-i\omega t)]. \quad (3.2)$$

В этом случае уравнение (3.1) в покоординатной записи примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \gamma \dot{x} &= -\frac{e}{m} \left( 1 - \frac{1}{c} \dot{z} \right) E, \\ \ddot{z} + \gamma \dot{z} &= -\frac{e}{mc} \dot{x} E. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Поскольку задача имеет малый параметр  $q = v/c$ , для решения задачи можно воспользоваться методом последовательных приближений.

#### *Нулевое приближение*

В нулевом приближении ( $q = 0$ ) сразу следует  $z^{(0)} = 0$ , т. е. дипольность приближения. Уравнение для  $x$  становится линейным с классическим гармоническим решением  $x^{(0)} = \text{Re}[x_0 \exp(-i\omega t)]$ , причем комплексная амплитуда для движения заряда по оси  $x$  определяется выражением

$$x_0 = \frac{e/m}{\omega^2 + i\gamma\omega} \mathcal{E}.$$

Заметим, что вещественное решение  $x^{(0)}$  можем записать в форме

$$x^{(0)} = \frac{e/m}{\omega\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \mathcal{E} \cos(\omega t + \varphi), \quad \varphi = \arctg\left(\frac{\gamma}{\omega}\right).$$

Линейная поляризуемость свободного электрона  $\mathbf{a}$  связана со смещением заряда через определение дипольного момента  $\mathbf{d}^{(0)} = -e\mathbf{r}_0 = \mathbf{a}\mathcal{E}$ , откуда следует, что

$$\alpha_{ii}(\omega) \equiv \alpha = -\frac{e^2}{m\omega(\omega + i\gamma)}. \quad (3.4)$$

Используя (3.4), комплексную амплитуду  $x_0$  можем представить в компактном виде:

$$x_0 = -\frac{\alpha}{e} \mathcal{E}.$$

Учет объемной концентрации электронов  $N$  приводит к ненулевым диагональным элементам тензора линейной восприимчивости газа свободных электронов

$$\chi_{ii} = N\alpha_{ii} = -\frac{Ne^2}{m\omega(\omega + i\gamma)}. \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует известное выражение для диэлектрической проницаемости плазмы (с учетом  $\omega\tau \gg 1$  на оптических частотах)

$$\varepsilon - 1 = 4\pi\chi = -\frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2} \equiv -\frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

где  $\omega_p$  – плазменная резонансная частота.

Сделаем оценку поляризуемости свободного электрона при  $\omega \gg \gamma$ . Из (3.4) следует

$$|\alpha(\omega)| = \frac{e^2}{m\omega^2} = r_e \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2.$$

Естественным образом, линейная поляризуемость имеет вид (и смысл) некоторого эффективного объема, куда входит комбинация длины волны  $\lambda = 2\pi c/\omega$  и классического радиуса электрона  $r_e \equiv \frac{e^2}{mc^2} \simeq 2.8 \cdot 10^{-13}$  см.

Если энергия кванта  $\hbar\omega$  соответствует потенциалу ионизации атома водорода ( $\hbar\omega = \frac{e^2}{2a_0} = \frac{me^4}{2\hbar^2} \simeq 13.6$  эВ), то

$$|\alpha| = \frac{e^2}{m\omega^2} = \frac{4\hbar^6}{m^3 e^6} = 4a_0^3,$$

где  $a_0 = \frac{\hbar}{me^2} \simeq 0.53 \cdot 10^{-8}$  см – боровский радиус, т. е.  $|\alpha| = 4a_0^3 \simeq 6 \cdot 10^{-25}$  см<sup>3</sup>, что примерно соответствует объему атома водорода.

### *Первое приближение*

В первом приближении (т. е. когда  $\mathbf{q} = \mathbf{v}^{(0)}/c$  и в правые части системы уравнений (3.3) подставляются  $z^{(0)} = 0$  и  $x^{(0)} = -\text{Re}[\frac{\alpha}{e}\mathcal{E}\exp(-i\omega t)]$ ) уравнение движения имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{z}^{(1)} + \gamma \dot{z}^{(1)} &= -\frac{eE}{mc} \dot{x}^{(0)} = \\ &= -\frac{e}{mc} \text{Re}[\mathcal{E}\exp(-i\omega t)] \text{Re}\left[-i\omega \frac{\alpha}{e} \mathcal{E}\exp(-i\omega t)\right] = \\ &= \frac{\omega|\alpha|\mathcal{E}^2}{mc} \text{Re}[\exp(-i\omega t)] \text{Re}\left[\exp\left(i\frac{\pi}{2} - i\varphi - i\omega t\right)\right] = \\ &= \frac{\omega|\alpha|\mathcal{E}^2}{mc} \cos(-\omega t) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \omega t\right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $\alpha = |\alpha|\exp(-i\varphi)$ . После разложения произведения косинусов (см. (Д.3)) в правой части (3.6) появляется зависящее от времени слагаемое, ответственное за ангармонизм на удвоенной частоте:

$$\ddot{z}^{(1)} + \gamma \dot{z}^{(1)} = \frac{\omega|\alpha|}{2mc} \mathcal{E}^2 [\sin(2\omega t + \varphi) + \sin(\varphi)]. \quad (3.7)$$

Уравнение для соответствующего смещения  $z^{(1)}$  в комплексной формулировке примет вид

$$\ddot{z}^{(1)} + \gamma \dot{z}^{(1)} = \frac{\omega|\alpha|}{2mc} \mathcal{E}^2 \exp\left(i\frac{\pi}{2} - i\varphi - 2i\omega t\right) = -\frac{i\omega\alpha}{2mc} \mathcal{E}^2 \exp(-2i\omega t).$$

Следовательно, комплексная амплитуда решения вида  $z = \text{Re}[z_0 \exp(-2i\omega t)]$  будет равна

$$z_0^{(1)} = \frac{\omega\alpha\mathcal{E}^2}{2mc} \frac{i}{4\omega^2 + 2i\gamma\omega} = \frac{-ie^2\mathcal{E}^2}{8m^2c\omega(\omega + i\gamma/2)(\omega + i\gamma)} \equiv \frac{\beta}{-e} \mathcal{E}^2,$$

где  $\beta$  – нелинейная (квадратичная) поляризуемость:

$$\beta = \frac{ie^3}{8m^2c\omega(\omega + i\gamma/2)(\omega + i\gamma)}. \quad (3.8)$$

С учетом объемной концентрации электронов  $N$  получим значение нелинейной (квадратичной) восприимчивости газа свободных электронов

$$\chi_{zxx} = N\beta. \quad (3.9)$$

Заметим, что справедлив принцип Онзагера:  $c^{(2)*}(\omega) = c^{(2)}(-\omega)$ .

Газ свободных электронов является изотропной центросимметричной средой и, следовательно, как это было показано в предыдущей лекции, восприимчивость  $c^{(2)}$  не может иметь в однородной среде наведенной электрической дипольной поляризации. Как можно видеть из (3.1), найденное значение  $c^{(2)}$  обусловлено лоренцевским членом в (3.1) (магнитно-дипольной нелинейностью свободного электрона) и в случае плоской волны представляет собой вклад индуцированного на удвоенной частоте магнитного момента

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &\sim \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{i\omega} \mathbf{E} \times (\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{E}) = \\ &= \frac{c}{i\omega} \left[ \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{N}})\mathbf{E} \right] = \frac{c}{2i\omega} \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}). \end{aligned}$$

Оценим  $\beta$  при  $\omega \gg \gamma$ . Из (3.8) следует

$$|\beta| \simeq \frac{e^3}{8m^2c\omega^3} = \frac{e}{8mc\omega} |\alpha| \equiv \frac{|\alpha|}{E_{free}},$$

где  $E_{free}$  – характерное поле, при котором сравниваются линейный и нелинейный отклики свободного электрона. Если энергия кванта  $\hbar\omega$  соответствует потенциалу ионизации атома водорода, то

$$\begin{aligned} E_{free} &= \frac{8mc\omega}{e} = 4 \frac{cm^2e^3}{\hbar^3} = 4 \frac{\sqrt{mc^2}}{a_0^{3/2}} \simeq \\ &\simeq 9.4 \cdot 10^9 \text{ CGSE} \simeq 2.8 \cdot 10^{12} \text{ В/см} (10^{22} \text{ Вт/см}^2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ниже покажем, что для связанного электрона ангармонизм на два порядка больше.

Смещения  $x^{(0)}$  и  $z^{(1)}$  соответствуют томсоновскому (упругому) и гиперрэлеевскому рассеянию, соответственно. Нелинейный процесс рассеяния можно грубо представить как поглощение двух квантов из падающего луча и излучение одного кванта удвоенной частоты, причем диаграмма излучения соответствует диполю, ориентированному вдоль направления падающего луча. Оценивая среднюю рассеиваемую плотность мощности энергии  $W$  ( $W = 2\langle \dot{d}^2 \rangle / 3c^2$  для излучения частицы с дипольным моментом  $d$ ) и интенсивность падающего излучения  $I = c|E|^2/8\pi$ , соответствующие сечения рассеяния ( $\sigma \equiv W/I$ ) на свободном электроны можно оценить по формулам

$$\sigma_{\omega} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \text{ (формула Томсона)}, \quad \sigma_{2\omega} = \sigma_{\omega} \frac{eE}{8mc\omega} \ll \sigma_{\omega}.$$

Развитая выше модель может быть уточнена за счет учета неоднородностей и использована для описания оптических нелинейностей, связанных с нелинейным откликом электронов в металлах, полупроводниках, газовой плазме и в рентгеновском диапазоне в кристаллах.

### 3.2. Анггармонический осциллятор как модель нелинейной поляризуемости

Пусть частица находится в потенциальной яме

$$V(x) = \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2 + eEx - \frac{m}{3} \eta x^3,$$

где  $\eta$  – малый параметр, описывающий отклонение формы потенциальной ямы от параболы. Уравнение движения для заряда (электрона) в таком потенциале имеет вид:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} E + \eta x^2, \quad (3.11)$$

где  $\gamma$  – феноменологически введенное затухание осциллирующего движения электрона. Рассмотрим случай, когда внешнее электромагнитное поле представляет собой сумму двух плоских монохроматических волн с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$E = \text{Re}[\mathcal{E}_1 \exp(-i\omega_1 t)] + \text{Re}[\mathcal{E}_2 \exp(-i\omega_2 t)].$$

Решение будем искать в виде разложения по малому параметру  $\eta$ .

#### *Нулевое приближение*

В нулевом приближении ( $\eta = 0$ ) уравнение для  $x$  становится линейным с классическим гармоническим решением  $x_i^{(0)} = \text{Re}[x_i^0 \exp(-i\omega_i t)]$  ( $i = 1, 2$ ) с комплексной амплитудой

$$x_i^0(\omega_i) = \frac{-e/m}{D(\omega_i)} \mathcal{E}_i,$$

где  $D(\omega_i) \equiv \omega_0^2 - \omega_i^2 - i\gamma\omega_i = D^*(-\omega_i)$ . Следовательно, линейная поляризуемость свободного электрона, связанная со смещением заряда через определение дипольного момента  $d_i = -ex_i^0 = \alpha(\omega_i)\mathcal{E}_i$ , имеет вид

$$\alpha(\omega_i) = \frac{e^2}{mD(\omega_i)}. \quad (3.12)$$

Переход к поляризуемости сводится в простейшем случае к

суммированию поляризуемостей отдельных атомов:

$$\chi^{(1)} = \alpha(\omega)N. \quad (3.13)$$

### *Первое приближение*

В первом приближении учитываем слагаемое  $\eta[x_1^{(0)}(\omega_1) + x_2^{(0)}(\omega_2)]^2$  в (3.11). Это приводит к появлению спектральных (Фурье) компонент смещения с частотами 0,  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ ,  $\omega_1 \pm \omega_2$ . Например, поправка первого порядка в смещении  $x_3^{(1)}$  на частоте  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  имеет вид

$$x_3^{(1)} = \frac{\eta x_1^{(0)}(\omega_1)x_2^{(0)}(\omega_2)}{D(\omega_3)} \equiv \frac{1}{-e}\beta(-\omega_3, \omega_1, \omega_2)\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2,$$

где квадратичная поляризуемость

$$\beta(-\omega_3, \omega_1, \omega_2) = \frac{-\eta e^3}{m^2 D(\omega_3)D(\omega_2)D(\omega_1)}. \quad (3.14)$$

Для перехода к квадратичной восприимчивости имеем соотношение  $\chi_{xxx} = N\beta$ , где индексы  $xxx$  формально фиксируют одномерность проведенного рассмотрения. Проведенное рассмотрение допускает обобщение на случай трехмерного ангармонического осциллятора, когда поляризация  $\mathbf{P}$  и внешние поля  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  векторы (а не скаляры).

Оценим  $\beta$  при  $\omega \gg \gamma$ . Сначала сделаем оценку величины ангармонизма осциллятора. Пусть при смещении  $x = a_0$  линейная сила  $eE_0 = m\omega_0^2 a_0$ , где  $E_0$  – характерное внутриатомное поле, и нелинейная сила  $\eta m a_0^2$  сравниваются. Тогда параметр ангармонизма

$$\eta = \frac{\omega_0^2}{a_0}.$$

Для оценки нелинейного поля рассмотрим  $\beta$  при  $\omega \gg \gamma$ . Из (3.14) следует

$$|\beta| = \frac{\eta e^3}{m^2 D^3} = \frac{\eta e}{m D^2} \alpha \equiv \frac{\alpha}{E_{band}},$$

где  $E_{band}$  – характерное поле, при котором сравниваются линейный и нелинейный отклики связанного электрона. Тогда для электрона, вращающегося на первой боровской орбите,

$$E_{band} = \frac{m D^2}{e \eta} = \frac{m \omega_0^2 a_0}{e} = \frac{e}{a_0^2} \equiv E_a,$$

где  $E_a$  – электрическое поле на первой боровской орбите (чего и следовало ожидать). Таким образом, для связанного электрона даже в



отсутствии резонанса ангармонизм порядка на два больше, чем для свободного ( $E_{free}$  используем согласно (3.10)):

$$\frac{E_{band}}{E_{free}} = \frac{\omega_0^2 a_0}{8c\omega} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\omega_0}{8\omega} = \frac{\omega_0}{8 \cdot 137\omega} \simeq 10^{-3} \frac{\omega_0}{\omega}.$$

На этой частной модели можно проверить уже рассмотренные общие свойства квадратичной восприимчивости:

#### 1. Соотношение Онзагера

$$\chi_{ijk}^*(-\omega_3, \omega_1, \omega_2) = \chi_{ijk}(\omega_3, -\omega_1, -\omega_2).$$

2. Перестановочная симметрия по всем индексам, кроме первого, при соответствующей перестановкой частотных аргументов:

$$\chi_{ijk}(-\omega_3, \omega_1, \omega_2) = \chi_{ikj}(-\omega_3, \omega_2, \omega_1).$$

#### 3. Соотношение Миллера

$$c^{(2)}(-\omega_3, \omega_1, \omega_2) \sim \eta \alpha(\omega_3) \alpha(\omega_1) \alpha(\omega_2).$$

Т. е. существует параметр (коэффициент Миллера), слабо зависящий от частоты:

$$\Delta_{ijk} = \frac{\chi_{ijk}(-\omega_3, \omega_1, \omega_2)}{\chi_{ii}(\omega_3) \chi_{jj}(\omega_1) \chi_{kk}(\omega_2)}.$$

Важно, что это соотношение справедливо с единой константой ( $\Delta_{ijk} \approx 10^{-6}$  СГСЭ) для широкого набора кристаллов в области их прозрачности.

4. Если дисперсией  $c^{(2)}$  можно пренебречь, то имеем полную перестановочную симметрию (вдали от резонансов).

5. Кроме того, модель предсказывает резонанс  $c^{(2)}$  в  $Q = \omega_0/\gamma$  раз вблизи обнуления действительной части каждого из трех резонансных знаменателей. Причем поляризуемость  $\beta$  становится мнимой.

### 3.3. Стрикционный ангармонизм

В задаче о свободном электроны в поле электромагнитной волны, сила Лоренца  $F_z^{(1)} = -\frac{eE(\omega)}{mc} \dot{x}^{(0)}$  приводит к появлению кроме отклика на удвоенной частоте также и постоянного отклика (см. (3.7)). Высокочастотная составляющая приводит к осцилляциям электронов и ответственна за генерацию второй гармоники с величиной квадратичной поляризуемости (3.8). Теперь рассмотрим роль статического слагаемого в силе Лоренца.

В пространственно однородном поле статическая (средняя по периоду поля) компонента силы Лоренца возникает только при мнимой части линейной поляризуемости электрона  $\alpha'' = \text{Im} \alpha \neq 0$  (т. е. когда  $\gamma \neq 0$  в (3.4) и, следовательно,  $\phi \neq 0$  в (3.7)). В этом случае рассеиваемая электроном мощность составляет  $W = \alpha'' \omega |\mathbf{E}|^2 / 2$  (см. (1.25)) и сила давления света на свободный электрон

$$F_0 = \frac{W}{c} = \alpha'' \frac{\omega}{2} |\mathbf{E}|^2 = \sigma \frac{I}{c}, \quad (3.15)$$

где  $\sigma = W/I = 4\pi k \alpha''$ ,  $I = c|E|^2/8\pi$  – интенсивность излучения волны. Заметим, что если причиной затухания  $\gamma$  в (3.1) являются потери на излучение (т. е. "радиационное" трение), то  $W = 2\langle \ddot{d}^2 \rangle / 3c^2$ , где дипольный момент  $d = \alpha E$ . В этом случае (3.15) записывается в виде

$$F_0 = \frac{W}{c} = \frac{r_e^2}{3} |\mathbf{E}|^2. \quad (3.16)$$

В неоднородном поле средняя по периоду сила Лоренца возникает и при отсутствии поглощения (т. е. при  $\alpha'' = 0$ ). В этом случае среднее значение по периоду силы Лоренца в (3.1)

$$\mathbf{F}_0 = -\frac{e}{c} \langle \text{Re} \dot{\mathbf{r}} \times \text{Re} \mathbf{B} \rangle = \frac{\alpha}{c} \langle \text{Re} \dot{\mathbf{E}} \times \text{Re} \mathbf{B} \rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по времени и использовалось определение дипольного момента  $\mathbf{d} = -e\mathbf{r} = \alpha\mathbf{E}$ . Рассмотрим волну с частотой  $\omega$  и амплитудой магнитной составляющей  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= -\frac{\alpha}{\varepsilon} \langle (\text{Re} \mathbf{B}) \times \text{rot}(\text{Re} \mathbf{B}) \rangle = \\ &= -\frac{\alpha}{2\varepsilon} \tilde{N} \langle [\text{Re} \mathbf{B}]^2 \rangle + \frac{\alpha}{\varepsilon} \langle [(\text{Re} \mathbf{B}) \cdot \tilde{N}] \text{Re} \mathbf{B} \rangle = \\ &= -\frac{\alpha}{8\varepsilon} \tilde{N} \langle (\mathbf{B} + \mathbf{B}^*)^2 \rangle + \frac{\alpha}{4\varepsilon} \langle [(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*) \cdot \tilde{N}] (\mathbf{B} + \mathbf{B}^*) \rangle = \\ &= -\frac{\alpha}{4\varepsilon} \tilde{N} \langle |\mathbf{B}|^2 \rangle + \frac{\alpha}{4\varepsilon} \langle (\mathbf{B} \cdot \tilde{N}) \mathbf{B}^* + (\mathbf{B}^* \cdot \tilde{N}) \mathbf{B} \rangle. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Поскольку обычно амплитуда волны слабо меняется на расстояниях порядка длины волны, то будем считать, что и к рассматриваемому случаю применимо (1.8) и  $\mathbf{B}^2 \simeq \varepsilon E^2$ . Первое слагаемое в правой части (3.17) с учетом прозрачности среды можно трактовать как силу

$$\mathbf{F}_M = -\frac{\alpha}{4} \tilde{N} \langle |\mathbf{E}(\omega)|^2 \rangle, \quad (3.18)$$

которая называется силой Миллера. Эту силу можно представить как градиентную силу в потенциале  $U = \alpha |\mathbf{E}|^2 / 2$ . Для волны с постоянной

амплитудой эта сила равна 0 и она не оказывает влияния на движение электронов. Однако если  $\mathbf{E}(\omega)$  представляет сумму двух плоских волн одинаковой частоты, но распространяющихся в разных направлениях, то из-за возникновения стоящей волны  $\tilde{\mathbf{E}} = 2\mathcal{E}\cos kz\cos\omega t$  возникает статическая (средняя по времени) сила, действующая на электрон  $\mathbf{F}_M(z) = \alpha k \mathcal{E}^2 \sin(2kz)$ . Она приводит к тому, что при  $\alpha < 0$  заряженные частицы будут группироваться в пучностях волны.

В стационарных условиях сила Миллера должна компенсироваться градиентом давления:

$$\tilde{N}p = -N \frac{\alpha}{4} \tilde{N} \langle |\mathbf{E}(\omega)|^2 \rangle.$$

Таким образом, под действием поля происходит изменение давления, что и может трактоваться как электрострикция в световом поле. Изменение давления  $\delta p$  приводит к изменению плотности вещества  $\delta \rho$  и концентрации частиц  $\delta N$ :

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{\delta N}{N} = \beta_T \delta p = -\beta_T \frac{\alpha}{4} \langle |\mathbf{E}(\omega)|^2 \rangle,$$

где  $\beta_T$  – изотермическая сжимаемость вещества. Приращение числа частиц вызовет изменение восприимчивости  $\delta \chi = \alpha \delta N = -\beta_T (\chi^{(1)})^2 \langle |\mathbf{E}(\omega)|^2 \rangle / 4$ , где  $\chi^{(1)} = \alpha N$ . С другой стороны, поляризация  $\mathbf{P}^{(3)}(\omega) = \chi^{(3)}(\omega = \omega - \omega + \omega) |\mathbf{E}(\omega)|^2 \mathbf{E}(\omega) = \delta \chi \mathbf{E}(\omega)$  и, следовательно,

$$\chi^{(3)} = \frac{\beta_T}{4} (\chi^{(1)})^2. \quad (3.19)$$

Характерное нелинейное поле для рассматриваемого "коллективного" типа ангармонизма

$$E_{NL} \equiv \sqrt{\frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(3)}}} = \frac{2}{\sqrt{\beta_T \chi^{(1)}}}.$$

Оценим  $\chi^{(3)}$  и  $E_{NL}$ . Для жидкостей  $\chi^{(1)} \approx 0.1$ ,  $\beta_T \approx 10^{-10}$  см/дин. Тогда  $\chi^{(3)} \approx 10^{-13}$  см/эрг,  $E_{NL} \approx 10^6$  СГСЭ.

Другими вариантами "коллективных" ангармонизмов являются формируемые электромагнитным полем акустические, плазменные, температурные, спиновые волны, колебания ориентации анизотропных молекул, флуктуации термодинамических параметров среды, которые модулируют диэлектрическую проницаемость.

### 3.4. Коррекция $\epsilon^{(n)}$ за счет локального поля

Среднее макроскопическое поле  $\mathbf{E}$  в диэлектрическом шаре с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , находящемся в вакууме в однородном электрическом поле  $\mathbf{E}_0$ , составляет (см. задачу 3.1)

$$\mathbf{E} = \frac{3}{\epsilon + 2} \mathbf{E}_0.$$

Это поле в сплошном диэлектрике действует на каждую частицу. Однако для каждой частицы отдельно диэлектрик не является уже сплошной средой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Каждая частица отделена от остальных, причем эти последние группируются определенным образом вокруг нее, т. е. в микроскопическом масштабе каждая частица находится в поле своих соседей. Во внешнем поле частицы поляризуются и воздействуют в свою очередь определенным образом на своих соседей, в результате чего поле, действующее на выделенную молекулу (так называемое локальное поле), отличается в общем случае от среднего макроскопического поля  $\mathbf{E}$ . Согласно известной модели Лоренца в предположении, что размер молекулы существенно меньше, чем физически весьма малая сфера вокруг нее, где важно ее взаимодействие с соседями, для изотропных сред с локализованными связанными электронами поправка к полю пропорциональна поляризации (см. также задачу 3.2):

$$\mathbf{E}_{\text{лок}} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}. \quad (3.20)$$

С учетом соотношения  $4\pi\mathbf{P} = (\epsilon - 1)\mathbf{E}$  локальное поле Лоренца можно записать в виде

$$\mathbf{E}_{\text{лок}} = \frac{\epsilon + 2}{3} \mathbf{E}. \quad (3.21)$$

Поляризацию можно записать либо через микроскопические поляризуемости и локальные поля, либо через макроскопические восприимчивости и внешние приложенные поля:

$$\begin{aligned} P_i(\omega) &= N \left\{ \alpha^{(1)} [E_{\text{лок}}(\omega)]_i + \alpha_{ijl} [E_{\text{лок}}(\omega_1)]_j [E_{\text{лок}}(\omega_2)]_l + \dots \right\} = \\ &= \chi^{(1)} E_i(\omega) + \chi_{ijl} E_j(\omega_1) E_l(\omega_2) + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

Первое из выражений (3.22) с учетом (3.20) можно переписать в виде

$$P_i(\omega) = N \left[ 1 - \frac{4\pi}{3} N\alpha^{(1)}(\omega) \right]^{-1} \times \\ \times \left\{ \alpha^{(1)} E_i(\omega) + \alpha_{ijl} [E_{\text{лок}}(\omega_1)]_j [E_{\text{лок}}(\omega_2)]_l + \dots \right\}. \quad (3.23)$$

Если для оценки  $\mathbf{E}_{\text{лок}}$  пренебречь нелинейными вкладами в (3.22) и (3.23) (что обычно является хорошим приближением, так как  $|\mathbf{P}^{(n)}|_{n>1} \ll |\mathbf{P}^{(1)}|$ ), то локальное поле можно записать следующим образом:

$$\mathbf{E}_{\text{лок}}(\omega_i) = \left[ 1 - \frac{4\pi}{3} N\alpha^{(1)}(\omega) \right]^{-1} \mathbf{E}(\omega_i). \quad (3.24)$$

Тогда из (3.23) с учетом (3.24) получим

$$\chi^{(1)}(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{4\pi}{3} N\alpha^{(1)}(\omega)} N\alpha^{(1)}(\omega), \\ \chi^{(2)}(\omega = \omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{1 - \frac{4\pi}{3} N\alpha^{(1)}(\omega)} \times \frac{N\alpha_{ijl}(\omega)}{\left[ 1 - \frac{4\pi}{3} N\alpha^{(1)}(\omega_1) \right] \left[ 1 - \frac{4\pi}{3} N\alpha^{(1)}(\omega_2) \right]},$$

и в общем случае

$$\chi^{(n)}(\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) = \\ = \frac{1}{1 - \frac{4\pi}{3} N\alpha^{(1)}(\omega)} \times \frac{N\alpha^{(n)}(\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)}{\left[ 1 - \frac{4\pi}{3} N\alpha^{(1)}(\omega_1) \right] \dots \left[ 1 - \frac{4\pi}{3} N\alpha^{(1)}(\omega_n) \right]}. \quad (3.25)$$

Соотношение

$$\varepsilon^{(1)} = 1 + 4\pi\chi^{(1)} = \frac{1 + \frac{8\pi}{3} N\alpha^{(1)}}{1 - \frac{4\pi}{3} N\alpha^{(1)}},$$

связывающее линейную диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon^{(1)}$  с  $\chi^{(1)}$ , может быть записано в виде

$$\left[ 1 - \frac{4\pi}{3} N\alpha^{(1)} \right]^{-1} = \frac{\varepsilon^{(1)} + 2}{3}, \quad (3.26)$$

и тогда (3.25) можно представить в виде

$$\chi^{(n)}(\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) = NL^{(n)}\alpha^{(n)}(\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n), \quad (3.27)$$

где

$$L^{(n)} = \left[ \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega) + 2}{3} \right] \left[ \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_1) + 2}{3} \right] \dots \left[ \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_n) + 2}{3} \right] \quad (3.28)$$

– поправка на локальное поле для нелинейной восприимчивости  $n$ -го порядка.

Для неизотропных сред (3.27) остается верным, но фактор  $L^{(n)}$  будет

сложной тензорной функцией  $\epsilon^{(1)}(\omega), \epsilon^{(1)}(\omega_1), \dots, \epsilon^{(1)}(\omega_n)$ .

Из формулы (3.26) следует, что для прозрачных сред согласно теории дисперсии Лоренца должно выполняться равенство

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N\alpha^{(1)}$$

где  $n = \sqrt{\epsilon}$  – показатель преломления, и, следовательно, величина

$$r = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{\rho}$$

– *удельная рефракция вещества*, не должна зависеть от плотности среды  $\rho$ . Действительно, экспериментальные результаты (см., например, табл. 1 и 2) показывают, что удельная рефракция почти не зависит от плотности даже при конденсации пара в жидкость, когда плотность вещества изменяется примерно в тысячу раз.

Таблица 1.

Удельная рефракция воздуха  $r$  для различных давлений [9] ( $T = 14.5$  С, D-линия натрия).

Давление, атм	Показатель преломления $n$	Рефракция $r$ , отн. ед.
1.00	1.0002929	4.606
42.13	1.01241	4.661
96.16	1.02842	4.713
136.21	1.04027	4.743
176.27	1.05213	4.772

Таблица 2.

Изменение удельной рефракции  $r$  при конденсации пара в жидкость для излучения на частоте D-линии натрия [9].

Вещество	$n$ , пар	$n$ , жидкость	$r$ , пар, отн. ед.	$r$ , жидкость, отн. ед.
Кислород	1.000271	1.221	4.05	4.00
Соляная кислота	1.000447	1.245	6.68	5.95
Вода	1.000249	1.334	3.72	3.71
Сероуглерод	1.00147	1.628	21.99	21.33
Ацетон	1.00108	1.3589	16.16	16.14

**Задача 3.1.** Электромагнитное поле приводит не только к осциллирующему движению связанного электрона с некоторой частотой резонанса  $\omega_0$  (см. п. 3.2), но и вызывает раскачку собственных молекулярных колебаний с частотой  $\Omega_0$ . Показать, что для модели двух связанных внутримолекулярных осцилляторов – электронного и ионного,

с потенциальной ямой

$$V(x, Q) = \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{M}{2}\Omega_0^2 Q^2 + eEx - \eta x^2 Q,$$

где  $x$  – электронная координата,  $Q$  – координата колебательного движения ионов молекулы,  $\eta$  – параметр связи между этими осцилляторами (параметр ангармонизма), в нерезонансном приближении восприимчивости третьего порядка имеют вид

$$\begin{aligned}\chi^{(3)}(\omega_1 = \omega_2 + \omega_1 - \omega_2) &= \chi^{(3)*}(\omega_2 = \omega_1 - \omega_1 + \omega_2) = \\ &= \chi^{(3)}(\omega_3 = 2\omega_1 - \omega_2) = \chi^{(3)*}(\omega_4 = 2\omega_2 - \omega_1) = \frac{\eta^2 e^4 N}{Mm^4 \omega_0^4 D(\Omega)},\end{aligned}$$

где  $D(\Omega) \equiv \Omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\Gamma\Omega$ ,  $\Omega \equiv \omega_1 - \omega_2$ ,  $\Gamma$  – феноменологически введенное затухание осциллирующего движения иона,  $N$  – концентрация молекул. Показать также, что связь между плачевской поляризуемостью  $\partial\alpha/\partial Q$  и параметром ангармонизма  $\eta$  имеет вид

$$\frac{\partial\alpha}{\partial Q} = \frac{2e^2\eta}{m^2 D(\omega_1)D(\omega_2)} \simeq \frac{2e^2}{m^2 \omega_0^4} \eta,$$

где  $D(\omega_i) \equiv \omega_0^2 - \omega_i^2 - i\gamma\omega_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $\gamma$  – феноменологически введенное затухание осциллирующего движения электрона.

**Задача 3.2.** В диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_0$  имеется однородное электрическое поле напряженностью  $\mathbf{E}_0$ . Внутри этой среды находится диэлектрический шар с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Доказать, что внутри этого шара создается однородное электрическое поле напряженностью

$$\mathbf{E} = \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} \mathbf{E}_0.$$

**Задача 3.3.** В диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  имеется однородное электрическое поле напряженностью  $\mathbf{E}$ . Внутри этой среды находится сферическая полость. Предположим, что вектор поляризации  $\mathbf{P}$  всюду (за исключением полости) имеет постоянное значение. Показать, что в этом приближении в центре сферы поляризационными зарядами, индуцированными на поверхности сферы, создается электрическое поле напряженностью

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{3} \mathbf{E}.$$

**Задача 3.4.** Показать, используя для оценки поляризуемости атомов

формулу (3.13), что в области низких частот  $\omega \ll \omega_0$  ( $\omega_0$  – собственная частота колебаний электрона в атоме) в отсутствии поглощения выражение для показателя преломления имеет вид (*дисперсионная формула Коши*):

$$n - 1 \simeq A \left( 1 + \frac{B}{\lambda^2} \right),$$

где  $\lambda$  – длина волны и

$$A \simeq \frac{2\pi e^2 N}{m\omega_0^2}, \quad B \simeq \lambda_0^2, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}.$$

Оценить постоянные  $A$  и  $B$  для атома водорода и сопоставить с экспериментальными значениями [9]:  $A = 1.36 \cdot 10^{-4}$ ,  $B = 0.0077 \text{ мкм}^2$ .



## 4. Возбуждение волн нелинейной поляризации

### 4.1. Волновое уравнение для среды с нелинейной поляризацией

Рассмотрим переизлучение протяженной нелинейной среды, возбуждаемой бегущей электромагнитной волной. Пусть плоская линейно поляризованная волна  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{E} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$  падает на нелинейный кристалл. Это поле в каждой точке кристалла возбуждает локальную поляризацию  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(L)} + \mathbf{P}^{(NL)}$  ( $\mathbf{P}^{(L)}$  и  $\mathbf{P}^{(NL)}$  соответственно линейная и нелинейная части поляризации  $\mathbf{P}$ ). Для описания распространения и взаимодействия электромагнитных полей в протяженной среде нужна волновая картина. Волновая оптика базируется на системе уравнений Максвелла (1.1)–(1.5). Для электромагнитных волн в среде без электрических зарядов ( $\rho_{\text{ст}} = 0$ ) и электрических токов ( $\mathbf{j}_{\text{ст}} = 0$ ) из системы уравнений (1.1)–(1.5) можно получить следствие, называемое *волновым уравнением*:

$$\text{rot rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(L)}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(NL)}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.1)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных.

### 4.2. Связанные волны в нелинейной среде

Предположим, что  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  можно представить в виде совокупности плоских волн

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{k}_i, \omega_i) = \sum_i \mathcal{E}_i \exp\{i\mathbf{k}_i \mathbf{r} - i\omega_i t\},$$

$$\mathbf{P}^{(L)}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \mathbf{P}_i^{(1)}(\mathbf{k}_i, \omega_i) = \sum_i c^{(1)}(\omega_i) : \mathbf{E}_i(\mathbf{k}_i, \omega_i),$$

$$\mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n \geq 2} \mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{k}_m, \omega_m) = \sum_m \mathcal{P}_m^{(NL)} \exp\{i\mathbf{k}_m \mathbf{r} - i\omega_m t\},$$

где амплитуды  $\mathcal{E}_i$  считаются не зависящими явно от времени. С учетом соотношения  $\epsilon(\omega_i) = 1 + 4\pi c^{(1)}(\omega_i)$  уравнение (4.1) можно переписать в виде

$$\text{rot rot} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{k}_m, \omega_m = \omega). \quad (4.2)$$

Предположим, что  $\mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{k}_m, \omega) = \mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{k}_m, \omega)$  – нелинейная поляризация,

наведенная произведением полей  $\mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1, \omega_1) \dots \mathbf{E}_n(\mathbf{k}_n, \omega_n)$ . Тогда (4.2) вместе с уравнениями для каждой из этих  $n$  полей образуют систему из  $n + 1$  связанных уравнений. Например, в случае взаимодействия трех плоских волн

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1, \omega_1), \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2, \omega_2), \quad \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega = \omega_1 + \omega_2)$$

связанные волновые уравнения (4.2) имеют вид

$$\begin{aligned} \text{rot rot} \mathbf{E}_1 - \frac{\omega_1^2}{c^2} \mathbf{e}_1 : \mathbf{E}_1 &= \frac{4\pi\omega_1^2}{c^2} \mathbf{c}^{(2)}(-\omega_1, -\omega_2, \omega) : \mathbf{E}_2^* \mathbf{E}, \\ \text{rot rot} \mathbf{E}_2 - \frac{\omega_2^2}{c^2} \mathbf{e}_2 : \mathbf{E}_2 &= \frac{4\pi\omega_2^2}{c^2} \mathbf{c}^{(2)}(-\omega_2, \omega, -\omega_1) : \mathbf{E} \mathbf{E}_1^*, \\ \text{rot rot} \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{e} : \mathbf{E} &= \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathbf{c}^{(2)}(-\omega, \omega_1, \omega_2) : \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для решения (4.1) или (4.3) часто делают ряд упрощающих предположений. Например, ограничиваются рассмотрением бесконечных плоских волн и находят решение в рамках приближения заданного поля (интенсивности накачки) или приближения медленно меняющихся амплитуд.

### 4.3. Метод последовательных приближений

Пусть, для простоты, на нелинейную среду падает плоская волна  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и происходит переизлучение за счет нелинейной поляризации. Решать уравнение (4.1) будем методом малого параметра, полагая  $\mu \simeq \mathbf{P}^{(NL)}/\mathbf{P}^{(L)} \simeq E/E_a \ll 1$ . Пусть нелинейная среда занимает полупространство  $z > 0$ . Ищем решение нелинейного волнового уравнения (4.1) для полного поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  при  $z > 0$  в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 + \mu \mathbf{E}_1 + \mu^2 \mathbf{E}_2 \dots$$

**I.** В нулевом приближении получаем обычное волновое уравнение линейной оптики для поля  $\mathbf{E}_0$

$$\text{rot rot} \mathbf{E}_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{e} : \mathbf{E}_0) = 0,$$

где  $\mathbf{e} = \mathbf{1} + 4\pi\mathbf{c}^{(1)}$ . Если можно полагать, что  $\text{div} \mathbf{E}_0 \simeq 0$  (например, в изотропной среде согласно (1.3)  $\text{div} \mathbf{E}_0 = \varepsilon^{-1} \text{div} \mathbf{D}_0 = 0$ ), то  $\text{rot rot} \mathbf{E}_0 = \tilde{N} \text{div} \mathbf{E}_0 - \tilde{N}^2 \mathbf{E}_0 = -\tilde{N}^2 \mathbf{E}_0$  и

$$\tilde{N}^2 \mathbf{E}_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{e} : \mathbf{E}_0) = 0. \quad (4.4)$$

Сшивание решений этого линейного волнового уравнения, полученных для областей  $z < 0$  и  $z > 0$ , на границе раздела нелинейной и линейной сред  $z = 0$ , дает нам результат, известный как формулы Френеля.

**II.** Группируя члены для первого порядка по малому параметру  $\mu$ , получим неоднородное волновое уравнение для поля  $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$ :

$$\text{rot rot} \mathbf{E}_1 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{e} : \mathbf{E}_1) = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_1^{(NL)}}{\partial t^2},$$

где  $\mathbf{P}_1^{(NL)} = c^{(2)} : \mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0$ . Если можно полагать, что  $\text{div} \mathbf{E}_1 \simeq 0$  (например, для изотропной среды в случае почти поперечной нелинейной поляризации  $\mathbf{P}_1^{(NL)}$  в силу (1.3)  $\text{div} \mathbf{E}_1 = -4\pi\epsilon^{-1} \text{div}(c^{(2)} : \mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0) \simeq 0$ ), это уравнение можно переписать в виде

$$\tilde{\mathbf{N}}^2 \mathbf{E}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{e} : \mathbf{E}_1) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_1^{(NL)}}{\partial t^2}. \quad (4.5)$$

Полное решение волнового уравнения (4.5) во всем пространстве можно искать в виде

$$\mathbf{E}_1 = (\mathbf{E}_1^{\text{free}} + \mathbf{E}_1^{\text{ind}}) + \mathbf{E}_1^{\text{reflect}},$$

где в скобках обособлены две волны решения неоднородного уравнения в области нелинейного полупространства  $z > 0$ , а третья волна – это решение в области линейного пространства  $z < 0$ .

Нужно отметить, что в рамках теории возмущения заданное поле накачки  $\mathbf{E}_0$  остается неизменным при нелинейном взаимодействии с полями  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  и т. д. Поэтому данное приближение часто называют еще приближением заданного поля. Ограниченность этого приближения очевидна – закон сохранения энергии при таком подходе не выполняется. Определенный интерес может быть обусловлен возможностью рассмотрения прохождения импульсов через нелинейные среды.

#### 4.4. Приближение медленно меняющихся амплитуд

Рассмотрим для примера плоскую волну с изменяющейся амплитудой, распространяющуюся вдоль оси  $z$ :

$$\mathbf{E}(\omega, z) = \mathcal{E}(z) \exp(ikz - i\omega t). \quad (4.6)$$

Поскольку обмен энергии между волнами обычно становится заметным, когда волны проходят расстояние много большее их длительности, то можно считать, что

$$\left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}(z)}{\partial z^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial \mathcal{E}(z)}{\partial z} \right|. \quad (4.7)$$

Поле  $\mathbf{E}$  в общем случае можно разделить на продольную компоненту  $\mathbf{E}_{\parallel}$ , параллельную  $\mathbf{k}$ , и поперечную компоненту  $\mathbf{E}_{\perp}$ , перпендикулярную  $\mathbf{k}$ . Волновое уравнение (4.2) также можно разложить на два уравнения:

$$\tilde{N}^2 \mathbf{E}_{\perp} + \frac{\omega^2}{c^2} (\mathbf{e} : \mathbf{E})_{\perp} = -\frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathbf{P}_{\perp}^{(NL)}(\omega, z), \quad (4.8)$$

$$\tilde{N} \cdot [(\mathbf{e} : \mathbf{E})_{\parallel} + 4\pi \mathbf{P}_{\parallel}^{(NL)}] = 0. \quad (4.9)$$

При выводе (4.8)–(4.9) учтено, что

$$\tilde{N} \times (\tilde{N} \times \mathbf{E}_{\perp}) = \tilde{N}(\tilde{N} \cdot \mathbf{E}_{\perp}) - \tilde{N}^2 \mathbf{E}_{\perp} = -\tilde{N}^2 \mathbf{E}_{\perp},$$

$$\tilde{N} \times \mathbf{E}_{\parallel}(z) = \frac{\partial E_{\parallel}(z)}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial E_{\parallel}(z)}{\partial x} \mathbf{j} = 0.$$

Кроме того, имеем

$$\tilde{N}^2 \mathbf{E}_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{E}_{\perp} = \exp(ikz - i\omega t) \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + i2k \frac{\partial}{\partial z} - k^2 \right) \mathcal{E}_{\perp}(z),$$

причем  $k$ , заданное в (4.6), удовлетворяет (4.2) в отсутствии самовоздействия, т. е.

$$-k^2 \mathbf{E}_{\perp} + \frac{\omega^2}{c^2} (\mathbf{e} : \mathbf{E})_{\perp} = 0.$$

В приближении (4.7) дифференциальное уравнение второго порядка (4.8) сводится к простому дифференциальному уравнению первого порядка и тогда компоненты  $\mathbf{E}_{\perp}$  и  $\mathbf{E}_{\parallel}$  описываются уравнениями

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\perp}}{\partial z} = \frac{i2\pi\omega^2}{kc^2} \mathbf{P}_{\perp}^{(NL)}(\omega, z) \exp(-ikz + i\omega t), \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [(\mathbf{e} : \mathbf{E})_{\parallel} + 4\pi \mathbf{P}_{\parallel}^{(NL)}] = 0. \quad (4.11)$$

Это и есть приближение медленно меняющихся амплитуд. В общем случае решение волнового уравнения для поля  $\mathbf{E}(\mathbf{k}_i, \omega_i)$ , возбуждаемого нелинейной поляризацией

$$\mathbf{P}^{(NL)}(k_m, \omega_m = \omega_i) \sim \exp(i\mathbf{k}_m \mathbf{r} - i\omega_i t),$$

имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_m, \omega_i) = [\mathcal{E}_N \exp(i\mathbf{k}_i \mathbf{r}) + \mathcal{E}_P \exp(i\mathbf{k}_m \mathbf{r})] \exp(-i\omega_i t),$$

где  $\mathcal{E}_N$  и  $\mathcal{E}_p$  – члены, соответствующие общему решению однородного уравнения и частному решению неоднородного уравнения, соответственно. На границе падающая волна  $\mathbf{E}_I(\mathbf{k}_{iI}, \mathbf{k}_{mI}, \omega_i)$  дает начало отраженной волне  $\mathbf{E}_R(\mathbf{k}_{iR}, \mathbf{k}_{mR}, \omega_i)$  и преломленной волне  $\mathbf{E}_T(\mathbf{k}_{iT}, \mathbf{k}_{mT}, \omega_i)$ . Решения сшиваются с учетом непрерывности тангенциальных компонент  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ .

Следует заметить, что при выводе (4.10) пренебрегается распространяющейся в противоположном направлении компонентой поля, которая генерируется  $\mathbf{P}^{(NL)}$ .

*Пример 4.1.* Рассмотрим генерацию второй гармоники (ВГ) нецентросимметричным кристаллом GaAs из класса  $\bar{4}3m$  (кубическая сингония – оптически изотропный кристалл), который имеет три ненулевые и независимые компоненты тензора квадратичной восприимчивости:  $\chi_{xyz}$ ,  $\chi_{yzx}$  и  $\chi_{zxy}$  (см. задачу 2.1). Падающее поле накачки будем считать  $p$ -поляризованным (т. е. лежащим в плоскости падения) и для компонент поля накачки положим:  $\mathcal{E}_x \neq 0$ ,  $\mathcal{E}_z \neq 0$ ,  $\mathcal{E}_y = 0$ . Тогда для компонент вектора нелинейной поляризации справедливо

$$\mathcal{P}_x^{(2)} = \chi_{xyz} \mathcal{E}_y \mathcal{E}_z = 0, \quad \mathcal{P}_y^{(2)} = \chi_{yzx} \mathcal{E}_z \mathcal{E}_x \neq 0, \quad \mathcal{P}_z^{(2)} = \chi_{zxy} \mathcal{E}_x \mathcal{E}_y = 0.$$

Это означает, что волна нелинейных источников  $s$ -поляризована (т. е.  $\mathcal{P}^{(2)}$  перпендикулярна плоскости падения). Ясно, что и переизлучать эта волна поляризации будет  $s$ -поляризованное излучение ВГ.

## 5. Генерация оптического излучения в квадратичных средах

### 5.1. Укороченное уравнение для генерации второй гармоники в приближении плоских волн

Рассмотрим частную задачу – генерацию второй гармоники. Для нелинейной поляризации от полного поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\omega_1) + \mathbf{E}(\omega_2)$  согласно (1.18) имеем  $\mathbf{P}^{(2)}(\tilde{\omega}=\omega_i+\omega_j) = \mathbf{c}^{(2)}(-\tilde{\omega}, \omega_i, \omega_j) : \mathbf{E}(\omega_i)\mathbf{E}(\omega_j)$ , где  $i, j$  принимают значения  $\pm 1, \pm 2$ . Следовательно, полный набор взаимодействующих гармоник  $\mathbf{E}(\omega)$  в квадратичной среде определяется допустимыми значениями частот  $\tilde{\omega} = 0, \pm\omega, \pm 2\omega, \pm\omega/2$ . Направление распространения волны  $\mathbf{E}(\mathbf{k}_l, \omega_l) = \mathcal{E}_l \exp(i\mathbf{k}_l \mathbf{r} - i\omega_l t)$  совпадает с  $\mathbf{k}_l$  в случае положительных значений частот  $\omega_l$  (так называемая прямая волна) и противоположна  $\mathbf{k}_l$  в случае отрицательных значений частот  $\omega_l$  (обратная волна). Условимся, что  $\omega_{-|l|} \equiv -\omega_{|l|}$  (заметим, что  $\mathbf{E}(-\omega_{|l|}) = \mathbf{E}^*(\omega_{|l|})$ ). Нас интересуют компоненты с  $\mathbf{c}^{(2)}(-2\omega, \omega, \omega)$ ,  $\mathbf{c}^{(2)}(-\omega, 2\omega, -\omega)$  и  $\mathbf{c}^{(2)}(-\omega, -\omega, 2\omega)$ . Выберем ось  $z$  в направлении  $\mathbf{k}_1$  и ограничимся рассмотрением случая, когда  $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2$ . Тогда из уравнения (4.10) для рассматриваемых компонент поля  $\mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1, \omega)$  и  $\mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2, 2\omega)$  вида (4.6) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial z} &= \frac{i2\pi\omega^2}{k_1 c^2} \chi^{(2)}(-\omega, 2\omega, -\omega) \mathcal{E}_2(z) \mathcal{E}_1^*(z) \exp(-i\Delta z), \\ \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial z} &= \frac{i8\pi\omega^2}{k_2 c^2} \chi^{(2)}(-2\omega, \omega, \omega) \mathcal{E}_1(z) \mathcal{E}_1(z) \exp(i\Delta z), \end{aligned}$$

где фазовая расстройка  $\Delta = 2k_1 - k_2$  и учтено, в силу принятого в п. 2.2 соглашения о нормировке  $\mathbf{c}^{(n)}$ , что порядок полей в правых частях произволен (если индексы  $\chi_{ll_1 l_2}$  записаны в том же порядке), но должны игнорироваться другие вклады, отличающихся только порядком полей (перестановка полей с одинаковыми частотами также не должна давать дополнительных вкладов в поляризацию  $\mathbf{P}^{(2)}$ ). Продольной компонентой электрического поля пренебрегаем.

Комплексные амплитуды запишем в виде  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{10} e^{i\phi_1}$ ,  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{20} e^{i\phi_2}$ . Выписывая действительные и мнимые части обоих уравнений, получаем систему уравнений для (действительных) амплитуд

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}_{10}}{\partial z} + \sigma_1 \mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{20} \sin \Phi &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{20}}{\partial z} - \sigma_2 \mathcal{E}_{10}^2 \sin \Phi &= 0,\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$\frac{d\Phi}{dz} + \Delta + \left( 2\sigma_1 \mathcal{E}_{20} - \sigma_2 \frac{\mathcal{E}_{10}^2}{\mathcal{E}_{20}} \right) \cos \Phi = 0,$$

где  $\sigma_1 = \frac{2\pi\omega_1^2 \chi^{(2)}(-\omega, 2\omega, -\omega)}{k_1 c^2}$ ,  $\sigma_2 = \frac{8\pi\omega_1^2 \chi^{(2)}(-2\omega, \omega, \omega)}{k_2 c^2}$  и  $\Phi = \varphi_2(z) - 2\varphi_1(z) - \Delta z$ . Заметим, что если можно пренебречь дисперсией  $\mathbf{c}^{(2)}$ , то из полной перестановочности и прозрачности среды следует (см. (2.5))

$$\chi_{ijk}(-2\omega, \omega, \omega) = \chi_{ijk}(2\omega, -\omega, -\omega) = \frac{1}{2} \chi_{kij}(-\omega, 2\omega, -\omega).$$

Тогда (поскольку  $k_i = n_i \omega_i / c$ ,  $n_i \equiv n(\omega_i)$ )  $\sigma_i = \sigma / n_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\sigma = \frac{2\pi\omega}{c} \chi^{(2)}(-\omega, 2\omega, -\omega)$ .

Покажем, что выполняется закон сохранения энергии. Для этого помножим первое и второе уравнения соответственно на  $\mathcal{E}_{10}\sigma_2$ ,  $\mathcal{E}_{20}\sigma_1$  и сложим их. Получим  $\frac{\partial}{\partial z} (\sigma_2 \mathcal{E}_{10}^2 + \sigma_1 \mathcal{E}_{20}^2) = 0$  и, следовательно, суммарный поток энергии

$$\frac{cn_1}{8\pi} \mathcal{E}_{10}^2 + \frac{cn_2}{8\pi} \mathcal{E}_{20}^2 = \text{const.}$$

## 5.2. Генерация второй гармоники при синхронизме

Пусть выполняется условие фазового синхронизма  $\mathbf{D} = 2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = 0$  и поглощение отсутствует как на частоте накачки, так и на частоте второй гармоники. Решение третьего уравнения в (5.1) с начальным условием  $\mathcal{E}_{20}(z=0) = 0$  имеет вид

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \Phi}{1 - \sin \Phi} = \text{const} - \left( 2\sigma_1 \mathcal{E}_{20} - \sigma_2 \frac{\mathcal{E}_{10}^2}{\mathcal{E}_{20}} \right) z$$

и, следовательно, в силу малости  $\mathcal{E}_{20}$ ,

$$\sin \Phi = \text{th} \left\{ \text{const} + \left( -2\sigma_1 \mathcal{E}_{20} + \sigma_2 \frac{\mathcal{E}_{10}^2}{\mathcal{E}_{20}} \right) z \right\} \simeq 1.$$

Таким образом,  $\Phi = \varphi_2(z) - 2\varphi_1(z) \simeq \pi/2$  практически независимо от ее начального значения и, следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}_{10}}{\partial z} + \sigma_1 \mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{20} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{20}}{\partial z} - \sigma_2 \mathcal{E}_{10}^2 &= 0.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Учитывая закон сохранения  $\sigma_2 \mathcal{E}_{10}^2(z) + \sigma_1 \mathcal{E}_{20}^2(z) = \sigma_2 \mathcal{E}_{10}^2(z=0)$  из (5.2) получим уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{20}}{\partial z} = \sigma_2 \mathcal{E}_{10}^2(0) - \sigma_1 \mathcal{E}_{20}^2(z)$$

с решением, выражающимся через гиперболические функции:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{20}(z) &= \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \mathcal{E}_{10}(0) \operatorname{th}[\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \mathcal{E}_{10}(0) z], \\ \mathcal{E}_{10}(z) &= \mathcal{E}_{10}(0) / \operatorname{ch}[\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \mathcal{E}_{10}(0) z].\end{aligned}\quad (5.3)$$

Кривые (5.3) пересекаются при  $z \simeq l_{NL} \equiv 1/[\sigma \mathcal{E}_{10}(0)]$ . Это так называемая *характеристическая длина нелинейного взаимодействия*. При  $z = l_{NL}$  в излучение второй гармоники преобразуется около 70% мощности излучения накачки.

Заметим, что учет поглощения среды  $\delta$  не вносит принципиальных изменений в процесс возникновения генерации второй гармоники. В рассматриваемом случае синхронного режима генерации поглощение приведет к поправкам в (5.2) (для простоты, различием  $\delta_i$  и  $\sigma_i$  для рассматриваемых волн пренебрегаем):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}_{10}}{\partial z} + \delta \mathcal{E}_{10} + \sigma \mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{20} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{20}}{\partial z} + \delta \mathcal{E}_{20} - \sigma \mathcal{E}_{10}^2 &= 0,\end{aligned}$$

и в решение (5.3):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{20}(z) &= \mathcal{E}_{10}(0) \exp(-\delta z) \operatorname{th}\left\{\frac{\sigma}{\delta} [1 - \exp(-\delta z)] \mathcal{E}_{10}(0)\right\}, \\ \mathcal{E}_{10}(z) &= \mathcal{E}_{10}(0) \exp(-\delta z) / \operatorname{ch}\left\{\frac{\sigma}{\delta} [1 - \exp(-\delta z)] \mathcal{E}_{10}(0)\right\}.\end{aligned}\quad (5.4)$$

Из (5.4) следуют две принципиальные особенности генерации ВГ: 1) генерация носит беспороговый характер ( $\mathcal{E}_{10}(0)$  может быть сколь угодно малой); 2) процесс генерации не требует затравочной волны ВГ.

### 5.3. Несинхронный режим удвоителя частоты

Рассмотрим, как и выше, случай отсутствия поглощения, но теперь



будем полагать, что  $\mathbf{D} = 2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \neq 0$ . При наличии фазовой расстройки  $\Delta \neq 0$  оптимальная фаза  $\Phi_0 = \pi/2$  будет сохраняться не по всей длине. В этом случае, подставляя в (5.1) первые два уравнения в третье, получим

$$\frac{d\Phi}{dz} = -\Delta + \frac{\cos\Phi}{\sin\Phi} \frac{\partial}{\partial z} \ln(\mathcal{E}_{10}^2 \mathcal{E}_{20}), \quad \Phi = \varphi_2(z) - 2\varphi_1(z) - \Delta z.$$

Ограничимся упрощенным решением в рамках приближения заданного поля, т. е. будем полагать  $\mathcal{E}_{10}(z) \simeq \mathcal{E}_{10}(0)$  и  $\mathcal{E}_{20}(z) \ll \mathcal{E}_{10}(0)$ . Тогда

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{20}}{\partial z} = \sigma \mathcal{E}_{10}^2 \sin\Phi, \quad \frac{d\Phi}{dz} = -\Delta + \sigma \frac{\mathcal{E}_{10}^2}{\mathcal{E}_{20}} \cos\Phi.$$

Решение этих уравнений при начальном условии  $\mathcal{E}_{20}(0) = 0$  имеет вид

$$\mathcal{E}_{20}(z) = \frac{2\sigma}{\Delta} \mathcal{E}_{10}^2 \sin \frac{\Delta z}{2}, \quad \Phi(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta z}{2}. \quad (5.5)$$

Амплитуда волны ВГ на расстоянии порядка *длины когерентности*  $l_{coh} = \pi/|\Delta|$  составляет  $\mathcal{E}_{20}(l_{coh}) = \frac{2\sigma}{\pi} \mathcal{E}_{10}^2 l_{coh}$ . Тогда условие применимости (5.5)  $\frac{2\sigma}{\pi} \mathcal{E}_{10}^2 l_{coh} \ll \mathcal{E}_{10}$  или  $l_{coh} \ll l_{NL}$ .

#### 5.4. Условия фазового синхронизма при генерации второй гармоники

Как следует из (5.5), генерация второй гармоники в объеме среды происходит эффективно только при условии  $z \leq 1/|\Delta|$ . Для эффективной генерации необходимо, таким образом, чтобы размер кристалла превосходил  $l_{NL}$  (см. (5.3)), а длина когерентности  $l_{coh}$  была еще больше, причем желательно обеспечить синхронизм при коллинеарной геометрии взаимодействия вследствие конечных поперечных размеров пучков.

При фазовом синхронизме коллинеарных пучков

$$\Delta = 2k_1 - k_2 = \frac{\omega}{c} (n_1 - n_2) = 0.$$

Для изотропных веществ и кристаллов с кубической симметрией с *нормальной дисперсией* (т. е. с  $n(\omega_2) > n(\omega_1)$  при  $\omega_2 > \omega_1$ ) это условие не может быть выполнено. Коллинеарный фазовый синхронизм можно обеспечить с использованием аномальной дисперсии. Другая важная для практики возможность возникает в двулучепреломляющих кристаллах с нормальной дисперсией за счет использования волн разных типов (обыкновенной или необыкновенной волн) для падающего излучения и его гармоники. Это связано с тем, что коэффициент преломления  $n_e(\omega, \theta)$  необыкновенного луча, распространяющегося под углом  $\theta$  к оси

одноосного кристалла, определяется формулой

$$\frac{1}{n_e^2(\omega, \theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2(\omega)} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2(\omega)}, \quad (5.6)$$

и, следовательно, за счет увеличения угла  $\theta$  от 0 до  $\pi/2$  можно изменить  $n_e(\omega, \theta)$  от  $n_o(\omega)$  до  $n_e(\omega)$ . Дальнейший анализ условия фазового синхронизма несколько различен для отрицательных и положительных кристаллов.

а) *Отрицательный одноосный кристалл* (т. е.  $n_o(\omega) > n_e(\omega)$ ). В этом случае условия фазового синхронизма могут быть удовлетворены, если падающую волну выбрать обыкновенной, а генерируемую вторую гармонику – необыкновенной волной, при выполнении условия

$$n_o(2\omega) \geq n_o(\omega) \geq n_e(2\omega).$$

Тогда существует угол  $\theta_{\text{синх}}$  – направление фазового синхронизма, при котором

$$n_{e2} \equiv n_e(2\omega, \theta_{\text{синх}}) = n_o(\omega).$$

Следовательно

$$\sin^2 \theta_{\text{синх}} = \frac{n_{e2}^{-2} - n_o^{-2}(2\omega)}{n_e^{-2}(2\omega) - n_o^{-2}(2\omega)}. \quad (5.7)$$

Таким образом, если волна частоты  $\omega$  распространяется под углом  $\theta_{\text{синх}}$  к оси и имеет поляризацию, отвечающую обыкновенному лучу, то волна удвоенной частоты, синхронизовано возбуждаясь в том же направлении, будет обладать поляризацией необыкновенного луча.

б) *Положительный одноосный кристалл* (т. е.  $n_e(\omega) > n_o(\omega)$ ). В этом случае условия фазового синхронизма могут быть удовлетворены, если падающую волну с частотой  $\omega$  выбрать необыкновенной, а генерируемое излучение на частоте  $2\omega$  – обыкновенной волнами, при выполнении условия

$$n_e(\omega) \geq n_o(2\omega) \geq n_o(\omega).$$

Тогда угол синхронизации  $\theta_{\text{синх}}$  находится из уравнения

$$n_{e1} \equiv n_e(\omega, \theta_{\text{синх}}) = n_o(2\omega).$$

Следовательно

$$\sin^2 \theta_{\text{синх}} = \frac{n_o^{-2}(\omega) - n_{e1}^{-2}}{n_o^{-2}(\omega) - n_e^{-2}(\omega)}. \quad (5.8)$$

В силу малости коэффициентов восприимчивости длина нелинейного взаимодействия  $l_{NL}$  может заметно превысить расстояние, на котором фазовые скорости окажутся согласованными. В этом случае, после того как волны прошли расстояние  $l_{coh} = \pi/|\Delta|$ , могут быть использованы схемы фазовой коррекции.

Сдвиг фаз на  $\pi$  может быть получен многими способами. Можно, например, пропустить излучение через пластину из диспергирующего диэлектрика. Практически выгоднее пропустить волны через другой слой кристалла, имеющий противоположную ориентацию и, соответственно, другой знак тензора восприимчивости третьего ранга, как, например, в случае кристалла KDP. Можно также пропустить волны через слоистую среду из попарно зеркально перевернутых слоев кристалла, меняющих знак тензора восприимчивости третьего ранга при смене ориентации. Более простой способ получения того же результата заключается в использовании полного отражения обеих волн от стенок "волновода" после прохождения ими расстояния  $l_{coh}$ . Каждая из волн испытывает при отражении скачок фазы на  $\pi$ , в результате  $\delta\Phi = \delta\phi_2 - 2\delta\phi_1$  изменяется на  $\pi$ . В этом случае меняется на обратное направление световых волн в пространстве, а не ориентация кристалла.

Другая схема фазовой коррекции заключается в использовании многократного отражения одного из лучей света в резонаторе с высокой добротностью. Пусть, например, вторая гармоника отразится от второй пластины. После того как вторая гармоника вернется назад к передней пластине и отразится от нее, она опять окажется в фазе сама с собой и с падающей волной основной частоты.

## 5.5. Генерация суммарной частоты в приближении плоских волн

Рассмотрим частную задачу – генерацию суммарной частоты  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Для нелинейной поляризации от полного поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\omega_1) + \mathbf{E}(\omega_2) + \mathbf{E}(\omega_3)$  согласно (1.18) имеем  $\mathbf{P}^{(2)}(\omega=\omega_i+\omega_j) = c^{(2)}(-\omega, \omega_i, \omega_j) : \mathbf{E}(\omega_i)\mathbf{E}(\omega_j)$ , где  $i, j$  принимают значения  $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ . Нас интересуют компоненты  $c^{(2)}(-\omega_3, \omega_1, \omega_2)$ ,  $c^{(2)}(-\omega_3, \omega_2, \omega_1)$ ,  $c^{(2)}(-\omega_1, \omega_3, -\omega_2)$ ,  $c^{(2)}(-\omega_1, -\omega_2, \omega_3)$ ,  $c^{(2)}(-\omega_2, \omega_3, -\omega_1)$  и  $c^{(2)}(-\omega_2, -\omega_1, \omega_3)$ . Тогда уравнение (4.10) для рассматриваемых компонент поля  $\mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1, \omega_1)$ ,  $\mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2, \omega_2)$  и  $\mathbf{E}_2(\mathbf{k}_3, \omega_3)$  с учетом принятых правил нормировки восприимчивости примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial z} &= \frac{i2\pi\omega_1^2}{k_1 c^2} \chi(\omega_1) \mathcal{E}_3(z) \mathcal{E}_2^*(z) \exp(-i\Delta z), \\
\frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial z} &= \frac{i2\pi\omega_2^2}{k_2 c^2} \chi(\omega_2) \mathcal{E}_3(z) \mathcal{E}_1^*(z) \exp(-i\Delta z), \\
\frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial z} &= \frac{i2\pi\omega_3^2}{k_3 c^2} \chi(\omega_3) \mathcal{E}_1(z) \mathcal{E}_2(z) \exp(i\Delta z),
\end{aligned} \tag{5.9}$$

где фазовая расстройка  $\Delta = k_1 + k_2 - k_3$  и обозначено  $\chi(\omega_1) = \chi^{(2)}(-\omega_1, \omega_3, -\omega_2)$ ,  $\chi(\omega_2) = \chi^{(2)}(-\omega_2, \omega_3, -\omega_1)$ ,  $\chi(\omega_3) = \chi^{(2)}(-\omega_3, \omega_1, \omega_2)$ . Комплексные амплитуды запишем в виде  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{10} e^{i\varphi_1}$ ,  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{20} e^{i\varphi_2}$ ,  $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_{30} e^{i\varphi_3}$ . Выписывая действительные и мнимые части уравнений (5.9), получаем систему уравнений для (действительных) амплитуд

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}_{10}}{\partial z} + \sigma_1 \mathcal{E}_{20} \mathcal{E}_{30} \sin \Phi &= 0, \\
\frac{\partial \mathcal{E}_{20}}{\partial z} + \sigma_2 \mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{30} \sin \Phi &= 0, \\
\frac{\partial \mathcal{E}_{30}}{\partial z} - \sigma_3 \mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{20} \sin \Phi &= 0, \\
\frac{d\Phi}{dz} + \Delta + \left( \sigma_1 \frac{\mathcal{E}_{20} \mathcal{E}_{30}}{\mathcal{E}_{10}} + \sigma_2 \frac{\mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{30}}{\mathcal{E}_{20}} - \sigma_3 \frac{\mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{20}}{\mathcal{E}_{30}} \right) \cos \Phi &= 0,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

где эффективная фаза  $\Phi = \varphi_3(z) - \varphi_1(z) - \varphi_2(z) - \Delta z$ ,  $\sigma_i = 2\pi\omega_i^2 \chi(\omega_i) / (k_i c^2)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Заметим, что если можно пренебречь дисперсией  $\chi^{(2)}$ , то из полной перестановочности и прозрачности среды следует

$$\chi_{jkl}(-\omega_3, \omega_1, \omega_2) = \chi_{lkj}(\omega_2, -\omega_3, \omega_1) = \chi_{lkj}(-\omega_2, \omega_3, -\omega_1) = \chi_{jlk}(-\omega_1, \omega_3, -\omega_2).$$

Тогда  $\sigma_i = \sigma \omega_i / n_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\sigma = \frac{2\pi}{c} \chi_{jkl}(-\omega_3, \omega_1, \omega_2)$ .

Покажем, что выполняются соотношения Мэнли-Роу. Для этого помножим первое и второе из уравнений (5.10) на  $\sigma_2 \mathcal{E}_{10}$  и  $\sigma_1 \mathcal{E}_{20}$ , соответственно, и вычтем второе из первого:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\sigma_2 \mathcal{E}_{10}^2 - \sigma_1 \mathcal{E}_{20}^2) = 0$$

или

$$\frac{I_1(z) - I_1(0)}{\omega_1} = \frac{I_2(z) - I_2(0)}{\omega_2},$$

где  $I_i = \frac{cn(\omega_i)}{8\pi} \mathcal{E}_{i0}^2$ . Совместно с результатами для второй пары получим

$$\frac{I_1(z) - I_1(0)}{\omega_1} = \frac{I_2(z) - I_2(0)}{\omega_2} = -\frac{I_3(z) - I_3(0)}{\omega_3}.$$

Выражая  $I_1(z)$  и  $I_2(z)$  через  $I_3(z)$  и складывая их, получим, что в любом сечении  $z$  суммарный поток энергии  $\sum_{i=1}^3 I_i = \text{const}$  (закон сохранения энергии).

Для случая, когда мощность генерируемой волны мала (т. е.  $\mathcal{E}_{30}(z) \ll \mathcal{E}_{10}(z), \mathcal{E}_{20}(z)$ ) и можно положить  $\mathcal{E}_{10}(z) \simeq \mathcal{E}_{10}(0)$  и  $\mathcal{E}_{20}(z) \simeq \mathcal{E}_{20}(0)$ , из (5.10) следует система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{30}}{\partial z} - \sigma_3 \mathcal{E}_{10}(0) \mathcal{E}_{20}(0) \sin \Phi &= 0, \\ \frac{d\Phi}{dz} + \Delta - \sigma_3 \frac{\mathcal{E}_{10}(0) \mathcal{E}_{20}(0)}{\mathcal{E}_{30}} \cos \Phi &= 0, \end{aligned}$$

имеющая решение (легко проверить подстановкой)

$$\mathcal{E}_{30}(z) = \pm \frac{2\sigma_3}{\Delta} \mathcal{E}_{10}(0) \mathcal{E}_{20}(0) \sin \frac{\Delta z}{2}, \quad \Phi(z) = \pm \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta z}{2}. \quad (5.11)$$

Следовательно, в приближении постоянного поля выходная интенсивность  $I_3(L) \sim \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ , где  $x = \Delta L/2$ ,  $L$  — длина кристалла. Максимальное значение амплитуды волны генерации достигается на расстоянии  $l_{coh} = \pi/|\Delta|$  и составляет  $\mathcal{E}_{30}(l_{coh}) = \frac{2\sigma_3}{\pi} \mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{20} l_{coh}$ . Условие применимости полученного решения  $\frac{2\sigma_3}{\pi} \mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{20} l_{coh} \ll \sqrt{\mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{20}}$  или  $l_{coh} \ll \frac{\pi}{2\sigma_3} / \sqrt{\mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{20}}$ .

## 5.6. Условия фазового синхронизма трех коллинеарных волн

При фазовом синхронизме трех коллинеарных пучков с  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$

$$\Delta = k_1 + k_2 - k_3 = \frac{\omega_1}{c} n_1 + \frac{\omega_2}{c} n_2 - \frac{\omega_3}{c} n_3 = 0$$

или

$$\omega_1 [n(\omega_3) - n(\omega_1)] + \omega_2 [n(\omega_3) - n(\omega_2)] = 0. \quad (5.12)$$

Это условие не может быть выполнено автоматически. Рассмотрим, например, одноосный кристалл с нормальной дисперсией (т. е. с  $n(\tilde{\omega}) > n(\omega)$  при  $\tilde{\omega} > \omega$ ). В этом случае, если тип луча (обыкновенный или необыкновенный) одинаков для всех трех волн, то левая часть (5.12) строго положительна, поскольку  $n(\omega_3) > n(\omega_1), n(\omega_2)$ . Однако, если типы лучей не идентичны, то выполнение условия фазового синхронизма возможно. Эта возможность связана с тем, что коэффициент преломления

$n_e(\omega, \theta)$  необыкновенного луча, распространяющегося под углом  $\theta$  к оси одноосного кристалла, определяется формулой (5.6) и, следовательно, за счет увеличения угла  $\theta$  от 0 до  $\pi/2$  можно изменить  $n_e(\omega, \theta)$  от  $n_0(\omega)$  до  $n_e(\omega)$ . Выбор условия фазового синхронизма несколько различен для отрицательных и положительных кристаллов.

1) *Отрицательный одноосный кристалл* (т. е.  $n_0(\omega) > n_e(\omega)$ ). В этом случае условия фазового синхронизма могут быть удовлетворены, если падающие волны выбрать обыкновенными, а генерируемое излучение на суммарной частоте  $\omega_3$  – необыкновенной волной, при выполнении условия

$$n_0(\omega_3) \geq \frac{\omega_1}{\omega_3} n_0(\omega_1) + \frac{\omega_2}{\omega_3} n_0(\omega_2) \geq n_e(\omega_3).$$

В этом случае уравнение

$$n_{e3} \equiv n_e(\omega_3, \theta_{\text{синх}}) = \frac{\omega_1}{\omega_3} n_0(\omega_1) + \frac{\omega_2}{\omega_3} n_0(\omega_2)$$

имеет физическое решение для угла синхронизации  $\theta_{\text{синх}}$ :

$$\sin^2 \theta_{\text{синх}} = \frac{n_{e3}^{-2} - n_0^{-2}(\omega_3)}{n_e^{-2}(\omega_3) - n_0^{-2}(\omega_3)}. \quad (5.13)$$

2) *Положительный одноосный кристалл* (т. е.  $n_e(\omega) > n_0(\omega)$ ). В этом случае условия фазового синхронизма могут быть удовлетворены, если падающую волну с большей частотой  $\omega_2$  выбрать необыкновенной, а другую падающую волну с частотой  $\omega_1$  и генерируемое излучение на суммарной частоте  $\omega_3$  – обыкновенными волнами, при выполнении условия

$$n_e(\omega_2) \geq \frac{\omega_3}{\omega_2} n_0(\omega_3) - \frac{\omega_1}{\omega_2} n_0(\omega_1) \geq n_0(\omega_2).$$

Тогда из уравнения

$$n_{e2} \equiv n_e(\omega_2, \theta_{\text{синх}}) = \frac{\omega_3}{\omega_2} n_0(\omega_3) - \frac{\omega_1}{\omega_2} n_0(\omega_1)$$

находится угол синхронизации  $\theta_{\text{синх}}$ :

$$\sin^2 \theta_{\text{синх}} = \frac{n_{e2}^{-2} - n_0^{-2}(\omega_2)}{n_e^{-2}(\omega_2) - n_0^{-2}(\omega_2)}. \quad (5.14)$$

Если выполняется и более строгое условие

$$n_e(\omega_1) \geq \frac{\omega_3}{\omega_1} n_0(\omega_3) - \frac{\omega_2}{\omega_1} n_0(\omega_2) \geq n_0(\omega_1),$$

то можно выбрать необыкновенной волной также и падающую волну с

меньшей частотой  $\omega_1$ , а две другие, соответственно, обыкновенными волнами.

В рассмотренных вариантах только одна из трех волн полагалась необыкновенной. Другие варианты фазового согласования могут быть получены из аналогичного анализа, когда необыкновенными волнами полагаются две из них.

## 5.7. Генерация второй субгармоники

Рассмотрим частную задачу – генерацию второй субгармоники с частотой  $\omega_1 = \omega_2/2$ . С формальной точки зрения вывод укороченных уравнений для этого случая идентичен случаю генерации второй гармоники. Совпадают также и условия фазового синхронизма. Различия появляются только в момент постановки граничных условий, поскольку в данном случае задана накачка  $\mathcal{E}_{20}$ , а не  $\mathcal{E}_{10}$ . Запишем (5.1) еще раз

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}_{10}}{\partial z} + \sigma_1 \mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{20} \sin \Phi &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{20}}{\partial z} - \sigma_2 \mathcal{E}_{10}^2 \sin \Phi &= 0, \\ \frac{d\Phi}{dz} + \Delta + \left( 2\sigma_1 \mathcal{E}_{20} - \sigma_2 \frac{\mathcal{E}_{10}^2}{\mathcal{E}_{20}} \right) \cos \Phi &= 0,\end{aligned}\tag{5.15}$$

где (дисперсией  $c^{(2)}$  пренебрегаем)  $\Delta = 2k_1 - k_2$ ,  $\Phi = \varphi_2(z) - 2\varphi_1(z) - \Delta z$ ,  $\sigma_i = \frac{\sigma}{n_i}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\sigma = \frac{\pi\omega}{c} c^{(2)} \left( -\frac{\omega}{2}, \omega, -\frac{\omega}{2} \right)$ ,  $\omega \equiv \omega_2$ .

Домножая первые два из уравнений (5.15) на  $n_1 \mathcal{E}_{10}$  и  $n_2 \mathcal{E}_{20}$ , соответственно, и суммируя их, убеждаемся, что в любом сечении  $z$  суммарный поток энергии  $I_1 + I_2 = \text{const}$  (закон сохранения энергии),  $I_i = \frac{cn_i}{8\pi} \mathcal{E}_{i0}^2$ .

Последнее из уравнений (5.15) с использованием двух предшествующих можно представить также в виде

$$\frac{d\Phi}{dz} + \Delta - \frac{\cos \Phi}{\sin \Phi} \frac{\partial}{\partial z} \ln \left( \mathcal{E}_{10}^2 \mathcal{E}_{20} \right) = 0,\tag{5.16}$$

имеющем первый интеграл

$$\cos(\Phi) = \frac{\Gamma - \frac{\Delta}{2\sigma_1} \mathcal{E}_{10}^2}{\mathcal{E}_{10}^2 \mathcal{E}_{20}},\tag{5.17}$$

где  $\Gamma$  – постоянная, не зависящая от  $z$ . Действительно, дифференцируя (5.17) по  $z$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \mathcal{E}_{10}^2 \mathcal{E}_{20} \cos(\Phi) \right] = -\frac{\Delta}{\sigma_1} \mathcal{E}_{10} \frac{\partial \mathcal{E}_{10}}{\partial z},$$

откуда и следует одна из форм записи (5.16):

$$\cos \Phi \frac{\partial}{\partial z} \left( \mathcal{E}_{10}^2 \mathcal{E}_{20} \right) - \mathcal{E}_{10}^2 \mathcal{E}_{20} \sin \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \Delta \mathcal{E}_{10}^2 \mathcal{E}_{20} \sin \Phi.$$

Допустим, что при  $z = 0$  на частоте второй субгармоники шумы незначительны и можно положить  $\mathcal{E}_{10}(0) \simeq 0$ . Тогда амплитуда падающего излучения  $\mathcal{E}_{20}(z)$  выражается через значение амплитуды второй субгармоники  $\mathcal{E}_{10}(z)$  по формуле

$$\mathcal{E}_{20}^2(z) = \mathcal{E}_{20}^2(0) - \frac{n_1}{n_2} \mathcal{E}_{10}^2(z), \quad (5.18)$$

а (5.17) принимает вид

$$\cos(\Phi) = -\frac{\Delta}{2\sigma_1 \mathcal{E}_{20}}.$$

Используя это равенство для исключения  $\sin \Phi$  в первом из уравнений (5.15), получим уравнение для определения амплитуды поля второй субгармоники  $\mathcal{E}_{10}(z)$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{10}}{\partial z} = \pm \mathcal{E}_{10} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1^2} \left( \mathcal{E}_{20}^2(0) - \frac{n_1}{n_2} \mathcal{E}_{10}^2 \right) - \frac{\Delta^2}{4}}.$$

Используя обозначения

$$A = \frac{\sigma}{\sqrt{n_1 n_2}}, \quad B = \sqrt{\frac{n_2}{n_1} \mathcal{E}_{20}^2(0) - \frac{n_1 n_2 \Delta^2}{4\sigma^2}}$$

запишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{10}}{\partial z} = \pm A \mathcal{E}_{10} \sqrt{B^2 - \mathcal{E}_{10}^2},$$

имеющем решение  $z - z_0 = \pm \frac{1}{AB} \operatorname{arsech}(\mathcal{E}_{10}/B)$ . Следовательно,

$$\mathcal{E}_{10}(z) = \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \frac{\sqrt{1 - \delta^2} \mathcal{E}_{20}(0)}{\cosh\left(\sqrt{1 - \delta^2} \frac{z}{l_{NL}} - C\right)}, \quad \delta = \frac{n_1 \Delta}{2\sigma \mathcal{E}_{20}(0)}, \quad (5.19)$$

где через

$$l_{NL} = \frac{n_1}{\sigma \mathcal{E}_{20}(0)}$$

обозначена длина нелинейного взаимодействия в случае



рассматриваемого точного согласования  $\Delta = 0$ . Постоянная интегрирования  $C$  определяется из уровня шумов второй субгармоники  $\mathcal{E}_{10}$  при  $z = 0$ :

$$C = \operatorname{arccosh} \left( \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \frac{\sqrt{1 - \delta^2} \mathcal{E}_{20}(0)}{\mathcal{E}_{10}(0)} \right).$$

Образец типичного решения приведен на рис. 1. Решение монотонно возрастает до  $z = l_{NL} C / \sqrt{1 - \delta^2}$ , после чего происходит процесс возврата энергии основной частоте. Верхние кривые на рисунках показывают амплитуду падающего излучения  $\mathcal{E}_{20}(z)$  в соответствии с (5.18). При неточном согласовании эффективность преобразования снижается (см. рис. 1б для  $\Delta = 4 \text{ см}^{-1}$  ( $\delta^2 \simeq 0.6$ )).

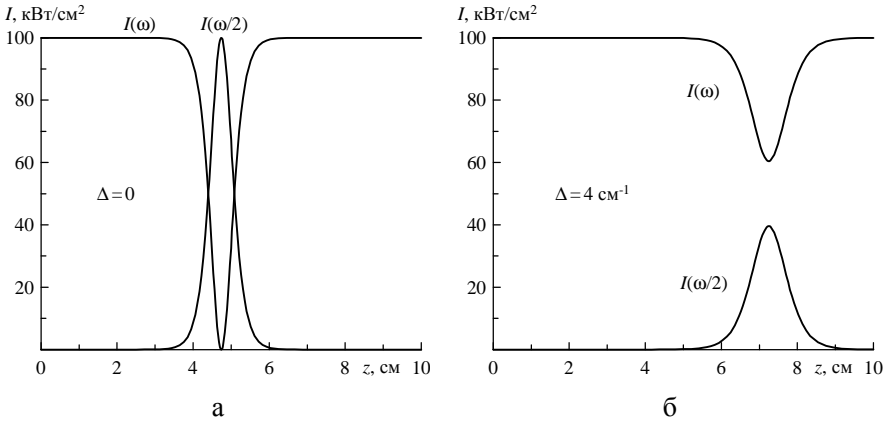


Рис. 1. Генерация второй субгармоники при фазовом синхронизме (а) и при фазовой расстройке  $\Delta = 4 \text{ см}^{-1}$  (б).

Если ограничиться приближением постоянного поля  $\mathcal{E}_{10}(z) \ll \mathcal{E}_{20}(z)$  (т. е. положить  $\mathcal{E}_{20}(z) \simeq \mathcal{E}_{20}(0)$ ), то решение (5.15) в случае точного согласования  $\Delta = 0$  будет иметь вид

$$\mathcal{E}_{10}(z) = \mathcal{E}_{10}(0) \exp \left( \frac{\sigma}{n_1} \mathcal{E}_{20}(0) z \right), \quad \Phi(z) = -\frac{\pi}{2}. \quad (5.20)$$

Следовательно, в приближении постоянного поля выходная интенсивность  $I_1(L) \simeq I_1(0) \exp(L/l_{NL})$ , где  $L$  – длина кристалла, а  $l_{NL} = n_1/(\sigma \mathcal{E}_{20}(0))$  – длина нелинейного взаимодействия. Из сравнения амплитуд падающего излучения и гармоники получим, что найденное решение справедливо при размере кристалла  $L \ll l_{NL} \exp[I_1(L)/I_1(0)]$ .

Важная особенность генерации субгармоник видна из выражения

(5.20) (или (5.19)): для возникновения генерации необходимо наличие начального сигнала субгармоники.

Другое принципиальное отличие от процесса генерации ВГ дает учет поглощения на частоте субгармоники. В рассматриваемом случае синхронного режима генерации поглощение приведет к поправке в первом уравнении (5.15):

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{10}}{\partial z} + \delta \mathcal{E}_{10} - \frac{\sigma}{n_1} \mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{20} = 0,$$

а его решение из (5.20) трансформируется в

$$\mathcal{E}_{10}(z) = \mathcal{E}_{10}(0) \exp \left[ \left( \frac{\sigma}{n_1} \mathcal{E}_{20}(0) - \delta \right) z \right]. \quad (5.21)$$

Из выражения (5.21) следует пороговый характер генерации: т. е. нарастание сигнала субгармоники возможно только при превышении уровня накачки определенного порога:  $\mathcal{E}_{20} > \delta n_1 / \sigma$ .

## 5.8. Основные параметрические трехчастотные процессы

*Параметрический процесс* – процесс взаимодействия излучения с веществом не меняет исходной внутренней энергии вещества.

*Непараметрический процесс* – процесс взаимодействия излучения с веществом с изменением внутренней энергии вещества.

Для параметрических процессов справедливы законы сохранения в следующей форме:

- а) Закон сохранения энергии взаимодействующих электромагнитных (ЭМ) полей (например,  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ).
- б) Закон сохранения импульса взаимодействующих ЭМ полей (например,  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ ). Это условие фазового синхронизма.

В непараметрических процессах часть энергии и импульса берет на себя среда.

Итак, для монохроматических волн  $\mathbf{E}(\omega_1)$ ,  $\mathbf{E}(\pm\omega_2)$ ,  $\mathbf{E}(\omega_3)$  нелинейная поляризация  $\mathbf{P}^{NL}(\omega_3) = c^{(2)}(-\omega_3, \omega_1, \pm\omega_2) : \mathbf{E}(\omega_1) \mathbf{E}(\pm\omega_2)$  ответственна за следующие процессы:

1. Генерация суммарной и разностной частот  $\omega_1 \pm \omega_2 \rightarrow \omega_3$  ( $\mathbf{P}^{NL}(\omega_3) = c^{(2)}(-\omega_3, \omega_1, \pm\omega_2) : \mathbf{E}(\omega_1) \mathbf{E}(\pm\omega_2)$ ).
2. При условии  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  этот процесс трансформируется либо в генерацию второй гармоники,  $\omega_1 + \omega_2 \rightarrow 2\omega$  ( $\mathbf{P}^{NL}(2\omega) = c^{(2)}(-2\omega, \omega, \omega) : \mathbf{E}(\omega) \mathbf{E}(\omega)$ ), либо в оптическое детектирование (появление статической поляризации)  $\omega_1 - \omega_2 \rightarrow 0$  ( $\mathbf{P}^{NL}(0) = c^{(2)}(0, \omega, -\omega) : \mathbf{E}(\omega) \mathbf{E}^*(\omega)$ ).

3. Эффект Поккельса  $\omega + 0 \rightarrow \omega$  ( $\mathbf{P}^{NL}(\omega) = c^{(2)}(-\omega, \omega, 0) : \mathbf{E}(\omega) \mathbf{E}_{static}$ ).
4. Параметрический распад фотонов, параметрическое рассеяние, параметрическое усиление,  $\omega_3 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$ , которое при выполнении условия  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  может быть названо процессом генерации субгармоники  $2\omega \rightarrow \omega + \omega$  ( $\mathbf{P}^{NL}(\omega) = c^{(2)}(-\omega, 2\omega, -\omega) : \mathbf{E}(2\omega) \mathbf{E}^*(\omega)$ ).

*Пример 5.1.* Рассмотрим процесс генерации второй гармоники излучением рубинового лазера ( $\lambda = 0.694$  мкм) в кристалле KDP при интенсивности накачки  $I = 100$  МВт/см<sup>2</sup>. KDP:  $\chi_{xyz}(-\omega, 2\omega, -\omega) = 2.6 \cdot 10^{-9}$  СГСЭ,  $\chi_{zy}(-\omega, 2\omega, -\omega) = 2.82 \cdot 10^{-9}$  СГСЭ,  $n_e(\omega) = 1.466$ ,  $n_e(2\omega) = 1.487$ ,  $n_o(\omega) = 1.506$ ,  $n_o(2\omega) = 1.534$ . Оценим следующие характерные величины:

- а) нелинейную длину  $l_{NL}$ ;
- б) длину когерентности  $l_{coh}$  для случая, когда поляризации падающей волны и гармоники совпадают и обе волны являются обыкновенными;
- в) поляризации падающей волны и гармоники и угол  $\theta_{синх}$ , обеспечивающие условия фазового синхронизма;
- г) интенсивность второй гармоники.

Используя результаты п. 5.2–5.4, определим следующие характеристики:

- а) Приведенная в условии интенсивность накачки соответствует амплитуде напряженности электрического поля  $\mathcal{E}_{10} = 2.7 \cdot 10^7$  В/м. Следовательно, нелинейная длина (см. п. 5.2.)

$$l_{NL} = \frac{1}{\sigma \mathcal{E}_{10}(0)} = \frac{c}{2\pi\omega \chi^{(2)}(-\omega, 2\omega, -\omega) \mathcal{E}_{10}(0)} = 0.7 \text{ см.}$$

- б) Фазовая расстройка в случае, когда обе волны являются обыкновенными, равна  $\Delta = 2k_1 - k_2 = \frac{2\omega}{c} [n_o(\omega) - n_o(2\omega)]$  и, следовательно, длина когерентности

$$l_{coh} = \frac{\pi}{|\Delta|} = \frac{\lambda}{4[n_o(2\omega) - n_o(\omega)]} = 6.2 \text{ мкм.}$$

- в) Для коэффициентов преломления выполнены условия

$$n_o(2\omega) \geq n_o(\omega) \geq n_e(2\omega)$$

и, следовательно, условия фазового синхронизма выполняются, если падающую волну выбрать обыкновенной, а генерируемую вторую гармонику – необыкновенной волной. Направление фазового синхронизма определяется из уравнения (5.7):

$$\sin^2 \theta_{\text{синх}} = \frac{n_0^{-2}(\omega) - n_0^{-2}(2\omega)}{n_e^{-2}(2\omega) - n_0^{-2}(2\omega)} = 0.585$$

и, следовательно,  $\theta_{\text{синх}} = 49.9^\circ$ .

г) Пусть обыкновенная  $\mathbf{E}_1 = \mathcal{E}_{10}\mathbf{e}_1$  и необыкновенная  $\mathbf{E}_2 = \mathcal{E}_{20}\mathbf{e}_2$  волны распространяются в плоскости, составляющей угол  $\psi$  с осью кристалла и, следовательно,

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} \sin \psi - \mathbf{j} \cos \psi,$$

$$\mathbf{e}_2 \simeq -\mathbf{i} \cos \theta_{\text{синх}} \cos \psi - \mathbf{j} \cos \theta_{\text{синх}} \sin \psi + \mathbf{l} \sin \theta_{\text{синх}}.$$

Кристалл KDP имеет точечную группу симметрии  $\bar{4}2m$ . Ненулевые компоненты его тензора  $c^{(2)}$  равны (см. примеч. 2.2)

$$\chi_{xyz} = \chi_{xzy} = \chi_{yxz} = \chi_{yzx} = 2.6 \cdot 10^{-9} \text{ СГСЭ}, \quad (5.22)$$

$$\chi_{zxy} = \chi_{zyx} = 2.82 \cdot 10^{-9} \text{ СГСЭ} = 2.82 \cdot 10^{-9} \text{ см}^{3/2}/\text{эрг}^{1/2}.$$

Коэффициенты  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  в формулах (5.1) содержат значения восприимчивостей, которые для рассматриваемой геометрии соответственно равны

$$\chi_{\text{эфф}}^{(2)}(\omega) = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{c}^{(2)}(-\omega, 2\omega, -\omega) : \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) = e_{1x}p_{1x} + e_{1y}p_{1y} + e_{1z}p_{1z},$$

$$\chi_{\text{эфф}}^{(2)}(2\omega) = \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{c}^{(2)}(-2\omega, \omega, \omega) : \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) = e_{2x}p_{2x} + e_{2y}p_{2y} + e_{2z}p_{2z},$$

где обозначено

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{c}^{(2)}(-\omega, 2\omega, -\omega) : \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1,$$

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{c}^{(2)}(-2\omega, \omega, \omega) : \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1.$$

Переходя от тензорной формы записи к обычной, для компонент векторов  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  получим

$$p_{1i} = \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 \chi_{ijm}(-\omega, 2\omega, -\omega) e_{2j} e_{1m},$$

$$p_{2i} = \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 \chi_{ijm}(-2\omega, \omega, \omega) e_{1j} e_{1m}.$$

Поскольку отличны от нуля только элементы  $\chi_{ijm}$  с различающимися индексами и  $e_{1z} = 0$ ,

$$p_{1x} = \chi_{xzy}(-\omega, 2\omega, -\omega)e_{2z}e_{1y} = -\chi_{xzy}(-\omega, 2\omega, -\omega) \sin \theta_{\text{синх}} \cos \psi,$$

$$p_{1y} = \chi_{yzx}(-\omega, 2\omega, -\omega)e_{2z}e_{1x} = \chi_{yzx}(-\omega, 2\omega, -\omega) \sin \theta_{\text{синх}} \sin \psi,$$

$$p_{1z} = \chi_{zxy}(-\omega, 2\omega, -\omega)e_{2x}e_{1y} + \chi_{zyx}(-\omega, 2\omega, -\omega)e_{2y}e_{1x} = \\ = \chi_{zxy}(-\omega, 2\omega, -\omega) \cos \theta_{\text{синх}} \cos(2\psi),$$

$$p_{2x} = p_{2y} = 0,$$

$$p_{2z} = \chi_{xzy}(-2\omega, \omega, \omega)e_{1x}e_{1y} + \chi_{zyx}(-2\omega, \omega, \omega)e_{1y}e_{1x} = -\chi_{xzy}(-2\omega, \omega, \omega) \sin(2\psi).$$

В результате имеем

$$\chi_{\text{эфф}}^{(2)}(\omega) = -\chi_{xzy}(-\omega, 2\omega, -\omega) \sin \theta_{\text{синх}} \sin(2\psi),$$

$$\chi_{\text{эфф}}^{(2)}(2\omega) = -\chi_{zyx}(-2\omega, \omega, \omega) \sin \theta_{\text{синх}} \sin(2\psi).$$

Максимальные значения  $|\chi_{\text{эфф}}^{(2)}|$  соответствуют выбору  $\psi = \pi/4$  (или  $\psi = -\pi/4$ ) и при синхронизме принимают значения с учетом (5.22) и вырожденности (см. 2.5) следующие значения

$$\chi_{\text{эфф}}^{(2)}(\omega) = -\chi_{xzy}(-\omega, 2\omega, -\omega) \sin \theta_{\text{синх}} \sin(2\psi) = -1.99 \cdot 10^{-9} \text{ СГСЭ},$$

$$\chi_{\text{эфф}}^{(2)}(2\omega) = -\chi_{zyx}(-2\omega, \omega, \omega) \sin \theta_{\text{синх}} \sin(2\psi) = -1.08 \cdot 10^{-9} \text{ СГСЭ}.$$

Наконец, при малых значениях  $z$  (по сути, в приближении заданного поля) из (5.3) следует выражение для интенсивности второй гармоники

$$I_2 = \frac{32\pi^3\omega^2}{c^3n_0^3(\omega)} |2\chi_{\text{эфф}}^{(2)}(2\omega)|^2 I^2 z^2 = 37z^2 \frac{\text{МВт}}{\text{см}^2},$$

где  $z$  берется в см.

*Пример 5.2.* Оценим пороговое значение интенсивности накачки рубинового лазера ( $\lambda = 0.694$  мкм) для процесса генерации второй субгармоники в кристалле КДР ( $\chi^{(2)}(-\omega/2, \omega, \omega/2) = 2.8 \cdot 10^{-9}$  СГСЭ,  $n_0(\omega/2) = 1.484$ ), если поглощение  $\delta$  на частоте субгармоники составляет  $0.001 \text{ см}^{-1}$ .

Согласно (5.21) необходимо обеспечить выполнение условия

$$\mathcal{E}_{20} > \frac{n_0(\omega/2)\delta}{\sigma} = \frac{n_0(\omega/2)c\delta}{2\pi\omega\chi^{(2)}(-\omega/2, \omega, -\omega/2)} = 0.93 \text{ СГСЭ} = 280 \frac{\text{В}}{\text{см}}.$$

Следовательно, пороговое значение интенсивности  $I_{\text{пор}} \simeq 70 \text{ Вт/см}^2$ .

## 6. Нелинейное рассеяние лазерного излучения

### 6.1. Вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР)

К числу нелинейных эффектов третьего порядка относится влияние, оказываемое излучением некоторой частоты  $\omega_1$  (*волна накачки*) на распространение в той же среде волны другой частоты  $\omega_2$ . Эти эффекты заключены в нелинейной восприимчивости  $\epsilon^{(3)}$  и, соответственно, в нелинейной проницаемости

$$\epsilon_{ijlm}(\omega_2, \omega_1, -\omega_1), \quad (6.1)$$

дающей вклад в индукцию с частотой  $\omega_2$ . В изотропной среде индукция  $\mathbf{D}_2$  на частоте  $\omega_2$  с учетом указанного вклада дается выражением

$$\mathbf{D}_2 = \epsilon_2 \mathbf{E}_2 + \alpha_2 (\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_1^*) \mathbf{E}_2 + \beta_2 (\mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_1 + \gamma_2 (\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_1^*, \quad (6.2)$$

где  $\mathbf{E}_1 = \mathcal{E}_1 \exp(i\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega_1 t)$ ,  $\mathbf{E}_2 = \mathcal{E}_2 \exp(i\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega_2 t)$ . В первом слагаемом  $\epsilon_2 = \epsilon(\omega_2)$  – обычная линейная проницаемость, а в остальных слагаемых  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$  – три независимые компоненты тензора (6.1) (их число очевидно из самого способа построения выражения (6.2) из трех векторов  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_1^*$  и  $\mathbf{E}_2$ ). Таким образом, нелинейное воздействие поля  $\mathbf{E}_1$  на поле с частотой  $\omega_2$  может быть описано путем введения анизотропной диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_{2ij} = [\epsilon_2 + \alpha_2 (\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_1^*)] \delta_{ij} + \beta_2 E_{1i} E_{1j}^* + \gamma_2 E_{1i}^* E_{1j}. \quad (6.3)$$

В недиссипативной среде коэффициенты  $\epsilon_2$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  и  $\gamma_2$  вещественны и тензор (6.3) эрмитов (и, следовательно,  $\epsilon_{2ij} = \epsilon_{2ji}$ ). Если поле  $\mathbf{E}_1$  линейно поляризовано, то  $\mathbf{D}_2 = [\epsilon_2 + (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \mathcal{E}_1^2] \mathbf{E}_2$ .

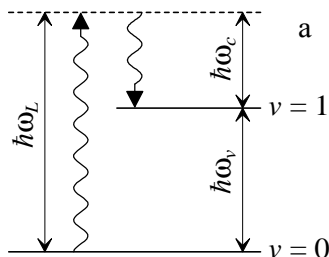
Более разнообразные явления могут происходить, если нелинейные взаимодействия поля со средой сопровождаются диссипацией. В таком случае коэффициенты  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$  комплексны (линейную проницаемость по-прежнему будем считать вещественной). Оказывается, что в таком случае диссипация может приводить как к ослаблению, так и усилению поля  $\mathbf{E}_2$ . В последнем случае говорят о *вынужденном комбинационном рассеянии*.

Вещественность линейных проницаемостей  $\epsilon(\omega_1)$ ,  $\epsilon(\omega_2)$  означает, что на самих частотах  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  в среде нет поглощения. Пусть в области частот, где среда способна к поглощению, лежит разность  $\omega_1 - \omega_2$ , но не сумма  $\omega_1 + \omega_2$ . Диссипация осуществляется лишь путем превращения квантов большей энергии в кванты меньшей энергии с отдачей

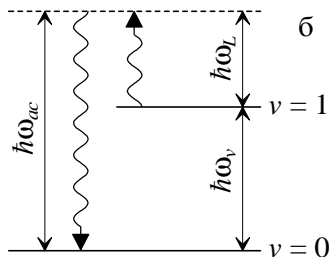
освобождающегося избытка среде. Таким образом, при  $\omega_1 - \omega_2 > 0$  волна накачки усиливает волну меньшей частоты  $\omega_2$ .

Другая ситуация имеет место, если в области поглощения лежит не разностная, а суммарная частота  $\omega_1 + \omega_2$ . В этом случае на каждый поглощенный квант  $\hbar\omega_2$  поглощается также квант  $\hbar\omega_1$ , и среде отдается энергия  $\hbar(\omega_1 + \omega_2)$  (*двухфотонное поглощение*). Естественно, что в этом случае ослабевают волны обеих частот.

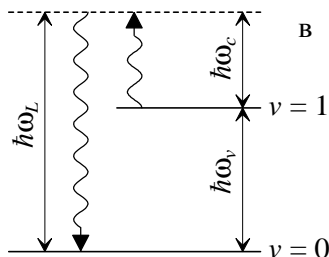
Обратим внимание на то, что рассмотренные эффекты не зависят от фазовых соотношений между полями (не требуется синхронизма полей).



Стоксово рассеяние, при котором поглощается лазерный фотон и вместе со стоксовым фотоном на частоте  $\omega_c = \omega_L - \omega_v$  возникает квант колебаний молекулы ( $v = 1$ ).



Антистоксово рассеяние, при котором поглощаются лазерный фотон и колебательный квант, а фотон на частоте  $\omega_{ac} = \omega_L + \omega_v$  испускается.



Процесс поглощения фотонов частоты  $\omega_c = \omega_L - \omega_v$ , стимулированный наличием лазерного излучения частоты  $\omega_L$ .

Рис. 2. Переходы при вынужденном комбинационном рассеянии.

Комбинационное рассеяние света давно используется для изучения колебательных спектров молекул и оптической ветви колебаний

кристаллических решеток. Исследуемое вещество (жидкость, газ или кристалл), облучается источником с узкой спектральной линией. Спектральный анализ рассеянного излучения выявляет присутствие линий, смещенных вниз по частоте на величину, равную колебательным частотам облучаемого образца. Этот тип рассеяния называется стоксовым рассеянием.

В спектре рассеянного излучения присутствуют также частоты, равные сумме частоты падающего излучения и колебательных частот вещества. Это так называемое антистоксово рассеяние, интенсивность которого обычно на несколько порядков меньше интенсивности стоксовой компоненты.

Формирование стоксовой и антистоксовой компонент рассеяния поясняются на рис. 2. Поскольку обычно антистоксово излучение определяется молекулами, находящимися в возбужденном состоянии с населенностью  $N_v = N_0 \exp(-\hbar\omega_v/kT)$ , то его интенсивность заметно ниже интенсивности стоксова излучения. Возможен также обратный процесс, при котором фотон стоксовой частоты поглощается (рис. 2в).

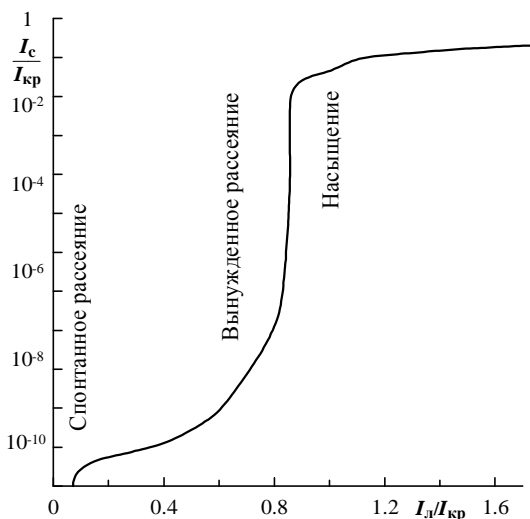


Рис. 3. Зависимость интенсивности стоксовой компоненты  $I_c$  в жидком азоте от интенсивности накачки лазера  $I_l$  ([10], с. 380).

При наличии поля лазерной накачки усиление стоксовой компоненты среды, помещенной внутрь оптического резонатора, способно скомпенсировать потери, и на частоте  $\omega_c$  возникает генерация. Генерация



при ВКР представляет собой практический способ преобразования излучения импульсных лазеров в когерентное излучение, сдвинутое по частоте на колебательную частоту вещества.

Исследования влияния интенсивности лазерной накачки на интенсивность стоксовой компоненты показали, что по достижении некоторой критической интенсивности накачки интенсивность стоксовой компоненты резко возрастает, а затем идет насыщение (см. рис. 3).

### *Макроскопическая теория ВКР. Стоксово рассеяние.*

Эксперименты по ВКР показали, что выходное излучение содержит несколько стоксовых ( $\omega_c = \omega_L - \omega_v, \omega_L - 2\omega_v, \dots$ ) и антистоксовых ( $\omega_{ac} = \omega_L + \omega_v, \omega_L + 2\omega_v, \dots$ ) компонент. Из рис. 2а видно, что в процессе излучения стоксовой компоненты населенность колебательного уровня  $v = 1$  увеличивается, поэтому становится возможным излучение на антистоксовой частоте. Стоксова ( $\omega_c$ ) и антистоксова ( $\omega_{ac}$ ) компоненты могут, в свою очередь, служить исходным излучением, генерирующим частоты  $\omega_c - \omega_v = \omega_L - 2\omega_v$  и  $\omega_{ac} + \omega_v = \omega_L + 2\omega_v$ . В результате могут появиться комбинационные частоты и более высоких порядков.

Анализ основных особенностей возникновения ВКР проведем из условия усиления или генерации на первой стоксовой частоте  $\omega_c = \omega_L - \omega_v$ , т. к. первоначально может усиливаться только эта компонента. Для возникновения других спектральных компонент требуется либо наличие молекул в возбужденном состоянии, либо присутствие стоксовой компоненты первого порядка.

Рассмотрим следующую одномерную модель: рассеивающая среда состоит из  $N$  независимых осцилляторов (т. е. ансамбль осцилляторов не поддерживает волновое движение с отличной от нуля групповой скоростью) с нормальной колебательной координатой  $Q(z, t)$ . Уравнение движения для осциллятора с частотой колебаний  $\omega_v$  и массой  $M$  имеет вид

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \Gamma \frac{\partial Q}{\partial t} + \omega_v^2 Q = \frac{F(z, t)}{M}, \quad (6.4)$$

где  $F(z, t)$  – возбуждающая сила, а  $\Gamma$  – постоянная затухания, выбранная так, что наблюдаемая ширина линии спонтанного комбинационного рассеяния равна  $\Delta\nu = \Gamma/2\pi$ . В модели Плачека тензор молекулярной поляризуемости является функцией нормальных координат  $Q$ :

$$\alpha(Q) = \alpha(0) + \frac{\partial \alpha}{\partial Q} Q + \dots, \quad (6.5)$$

и, значит, нелинейная поляризация при плотности числа осцилляторов (молекул)  $N$  будет определяться выражением

$$\mathbf{P}^{(NL)} = N \frac{\partial \alpha}{\partial Q} Q \mathbf{E}. \quad (6.6)$$

Возбуждающую силу можно получить, рассматривая электромагнитную энергию в молекулярной среде. Плотность энергии, запасенной в электрическом поле  $W = \frac{\epsilon}{8\pi} E^2$ , при использовании (6.5) может быть записана в виде

$$W = \frac{1}{8\pi} \left[ 1 + 4\pi N \left( \alpha_0 + \frac{\partial \alpha}{\partial Q} Q \right) \right] E^2.$$

Сила, действующая на единицу объема поляризуемой среды, равна  $\partial W / \partial Q$ , откуда делением на  $N$  получаем силу, действующую на один осциллятор

$$F = \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial Q} E^2 = \frac{1}{8\pi N} \frac{\partial \epsilon}{\partial Q} E^2. \quad (6.7)$$

Из (6.4) видно, что при отличной от нуля дифференциальной поляризуемости  $\partial \alpha / \partial Q$  колебания молекул могут возбуждаться электрическим полем.

Исследуем, как колебания молекул воздействуют на электромагнитное поле. В соответствии с (6.4) колебания молекул с частотой  $\omega_v$  вызывают модуляцию диэлектрической проницаемости с той же частотой. Это приводит к фазовой модуляции поля излучения (появляются боковые составляющие, смещенные на  $\omega_v$  друг от друга). Т. е. происходит обмен энергией между электромагнитными полями различных частот, разделенных интервалами, кратными  $\omega_v$ .

Рассмотрим плоские волны вида

$$\mathbf{E}(\omega_i, z) = \mathcal{E}_i(z) \exp(ik_i z - i\omega_i t), \quad \frac{\partial \mathcal{E}_i(z)}{\partial z} \ll |k_i \mathcal{E}_i(z)|, \quad i = L, c,$$

$$Q(\omega_v, z) = \mathcal{Q}(t) \exp(ik_v z - i\omega_v t),$$

и пусть полное поле является суммой лазерного ( $\omega_L$ ) и стоксова ( $\omega_c$ ) полей:

$$\mathbf{E}(\omega, z) = \mathbf{E}(\omega_L, z) + \mathbf{E}(\omega_c, z).$$

Волновые уравнения в приближении медленно меняющихся амплитуд приводятся к виду ( $\omega_v \simeq \omega_L - \omega_c$ ):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\alpha_L}{2}\right)\mathcal{E}_L &= i\frac{2\pi\omega_L^2}{k_L c^2}\chi_{RL}^{(3)}|\mathcal{E}_c|^2\mathcal{E}_L, \\
\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\alpha_c}{2}\right)\mathcal{E}_c &= i\frac{2\pi\omega_c^2}{k_c c^2}\chi_{Rc}^{(3)}|\mathcal{E}_L|^2\mathcal{E}_c, \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma + i\Omega\right)\mathcal{Q} &\simeq \frac{i}{\omega_v}\frac{1}{4\pi M}\frac{\partial\alpha}{\partial Q}\mathcal{E}_c\mathcal{E}_L^*,
\end{aligned} \tag{6.8}$$

где  $\chi_{RL}^{(3)} = \chi_{Rc}^{(3)*}$  и  $\Omega = \omega_{0v} - \omega_v$ . В стационарном случае (используем точное уравнение (6.4) при  $\omega_v = \omega_L - \omega_c$ ,  $k_v = k_L - k_c$ )

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{M}\frac{\partial\alpha}{\partial Q}\frac{\mathcal{E}_c\mathcal{E}_L^*}{\omega_{0v}^2 - \omega_v^2 - i\omega_v\Gamma}.$$

Подставляя это решение в (6.6), получим

$$\mathbf{P}_c^{(NL)} = \mathbf{P}_c^{(3)}(\omega_c) = \chi_{Rc}^{(3)}(-\omega_c, \omega_L, -\omega_L, \omega_c)|\mathcal{E}_L|^2\mathcal{E}_c,$$

где

$$\chi_{Rc}^{(3)}(-\omega_c, \omega_L, -\omega_L, \omega_c) = \frac{N}{M}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial Q}\right)^2\frac{1}{\omega_{0v}^2 - \omega_v^2 - i\omega_v\Gamma} \tag{6.9}$$

есть нелинейная восприимчивость третьего порядка для стоксова процесса ( $\omega_c = \omega_L - \omega_v$ ). Мнимая часть (6.9) связана с коэффициентом усиления

$$g_c = \frac{4\pi\omega_c}{cn_c}I_L\text{Im}\chi_{Rc}^{(3)},$$

и, следовательно, стоксово поле ( $\omega_c < \omega_L$ ) усиливается, а антистоксово поле ( $\omega_{ac} > \omega_L$ ) ослабляется. В частности, в приближении постоянного поля имеем

$$|\mathcal{E}_c(z)|^2 = |\mathcal{E}_c(0)|^2 \exp(g_c z).$$

Характеристики ВКР отличны от свойств обычного комбинационного рассеяния. Во-первых, существует некоторая пороговая мощность лазерного излучения, при превышении которой комбинационное рассеяние становится когерентным. Во-вторых, стоксово излучение имеет максимальную интенсивность в направлении падающего лазерного луча и становится исчезающе малым под углом  $4-5^\circ$  к направлению его распространения. Антистоксово излучение отсутствует в направлении падающего луча и возникает только под строго определенным углом к этому направлению, с апертурой конусов не более  $10^\circ$ . В-третьих, при определенных условиях одновременно с появлением *стоксовых линий*

появляются *антистоксовы линии*. В-четвертых, сильные стоксовы и антистоксовы линии могут формировать стоксовы и антистоксовы линии более высоких порядков. В связи с этим заметим, что расчеты с участием антистоксовой компоненты ( $\omega_{ac}$ ), аналогичные проведенным выше, показывают, что кубическая нелинейная поляризация  $P^{(3)}(\omega_{ac})$  на антистоксовой частоте  $\omega_{ac} = 2\omega_L - \omega_c$  может быть наведена в среде в процессе смешения волны накачки с частотой  $\omega_L$  и стоксовой волны с частотой  $\omega_c$  при наличии комбинационного резонанса  $\omega_L - \omega_c = \omega_{ac} - \omega_L$ .

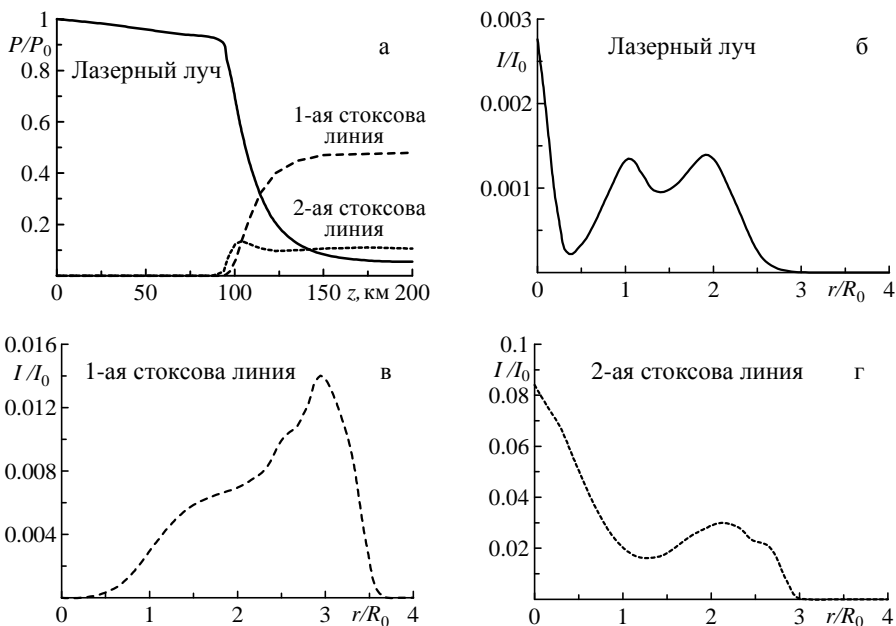


Рис. 4. Распространение непрерывного лазерного излучения в атмосфере на высоте 10 км (а). Нормированные профили пучка на расстоянии 200 км: (б) – лазерный луч, (в) – 1-ая и (г) – 2-ая стоксовы линии.  $\lambda = 1.315$  мкм,  $I_0 = 1.3$  МВт/см<sup>2</sup>.

Направление распространения всех волн можно определить из условия фазового синхронизма

$$\mathbf{D} = 2\mathbf{k}_L - \mathbf{k}_c - \mathbf{k}_{ac}.$$

Отсюда же следует, что в этом случае вынужденное комбинационное рассеяние является четырехфотонным процессом с исчезновением двух

фотонов лазерного излучения и появлением стоксова и антистоксова рассеянных фотонов.

На рис. 4а приведены данные по распространению непрерывного лазерного излучения мощностью  $P_0$  и радиусом  $R_0$  с интенсивностью  $I_0$  в центре пучка в средней атмосфере в условиях ВКР. На рис. 4б, 4в и 4г показаны радиальные профили поперечного сечения пучка на расстоянии 200 км соответственно для лазерного луча, 1-ой и 2-ой стоксовой линий.

## 6.2. Вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна

В квантовом рассмотрении вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна (ВРМБ) – это процесс, в котором прохождение излучения через среду формирует излучение, сдвинутое на частоту сформировавшихся этим же электрическим полем акустических фононов. Рассеянный свет имеет частоту, меньшую, чем падающее излучение, если происходит излучение акустического фонона, и, наоборот, большую, если происходит поглощение акустического фонона.

Рассмотрим электромагнитное поле  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\omega_1) + \mathbf{E}(\omega_2)$ ,  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_a$ , где  $\mathbf{E}(\omega_1)$  и  $\mathbf{E}(\omega_2)$  – падающее и рассеянное излучения, соответственно. Имеем волновое уравнение ( $i = 1, 2$ )

$$\tilde{N}^2 \mathbf{E}(\omega_i) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\epsilon \mathbf{E}(\omega_i) + 4\pi \mathbf{P}^{(NL)}(\omega_i)] \simeq 0. \quad (6.10)$$

Кроме того, запишем уравнение, описывающее оптическое возбуждение акустической волны (в жидкости):

$$v^2 \tilde{N}^2 \rho - 2\Gamma_B \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \tilde{N} \cdot \mathbf{f}, \quad (6.11)$$

где  $\rho$  – возмущение массовой плотности жидкости  $\rho_0$ ,  $v$  – фазовая скорость волны давления,  $\Gamma_B$  – постоянная затухания (полуширина линии) Мандельштама-Бриллюэна в спонтанном рассеянии. Воздействие интенсивного света изменяет диэлектрическую проницаемость среды  $\epsilon$ , в результате чего возникает нелинейная электрическая поляризация  $\mathbf{P}^{(NL)}(\omega_i)$  и вынуждающая сила  $\mathbf{f}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(NL)}(\omega_1) &= \frac{1}{4\pi} \delta\epsilon \mathbf{E}(\omega_2), \\ \mathbf{P}^{(NL)}(\omega_2) &= \frac{1}{4\pi} \delta\epsilon^* \mathbf{E}(\omega_1), \\ \mathbf{f} &= \tilde{N} \mathbf{p} = \tilde{N} \left( \frac{\rho_0}{2\pi} \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* \right), \end{aligned} \quad (6.12)$$

где  $p$  – электрострикционное давление, а изменения диэлектрической проницаемости равны

$$\delta\epsilon(p, T) = \left( \frac{\partial\epsilon}{\partial p} \right)_{T,E} \delta p + \left( \frac{\partial\epsilon}{\partial T} \right)_{p,E} \delta T. \quad (6.13)$$

В (6.12) учтен только электрострикционный механизм изменения диэлектрической проницаемости ( $\gamma = \rho_0 \frac{\partial\epsilon}{\partial p}$  – коэффициент электрострикции). Рассеяние света под влиянием нагрева, вызванного поглощением света, известно как температурное рассеяние.

Для вычисления вынуждающей силы  $\mathbf{f}$  нужны данные по  $\partial\epsilon/\partial p$ . В модели свободных электронов рассмотрение силы Лоренца в неоднородном поле приводит к появлению силы Миллера (3.18)  $\mathbf{F}_M = -\frac{\alpha}{4} \tilde{N} \langle |\mathbf{E}(\omega)|^2 \rangle$  ( $\alpha$  – линейная поляризуемость электрона), которая равна 0 в бегущей волне, но в стоящей волне  $\mathbf{E} = 2\mathcal{E} \cos kz \cos \omega t$  статическая (средняя по времени) сила, действующая на электрон,  $\mathbf{f}(z) = -\alpha \mathbf{k} \mathcal{E}^2 \sin(2kz)$ . Она приводит к тому, что при  $\alpha < 0$  заряженные частицы будут группироваться в пучностях волны и из равенства  $\chi^{(1)}(p) = \alpha N_0 \rho / \rho_0$  получим  $\partial\epsilon/\partial p = 4\pi\alpha N_0 / \rho_0$ . Ограничимся случаем плоских монохроматических волн для компонент полного поля с медленно меняющимися амплитудами

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\omega_i, z) &= \mathbf{e}_i \mathcal{E}_i(z) \exp(ik_i z - i\omega_i t), \quad \frac{\partial \mathcal{E}_i(z)}{\partial z} \ll |k_i \mathcal{E}_i(z)|, \\ \rho(\omega_a, z) &= \mathcal{A}(z) \exp(ik_a z - i\omega_a t), \quad \frac{\partial \mathcal{A}(z)}{\partial z} \ll |k_a \mathcal{A}(z)|, \end{aligned}$$

для случая, когда  $k_a = \omega_a/v$  и частоты связаны соотношением  $\omega_1 = \omega_a + \omega_2$ . В стационарном случае ВРМБ в направлении назад в пренебрежении слагаемыми со второй производной по  $z$  из (6.10) и (6.11) с учетом (6.12) получим (приближение медленно меняющихся амплитуд):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\alpha_1}{2} \right) \mathcal{E}_1 &= i \frac{\omega_1^2}{2k_1 c^2} \frac{\partial\epsilon}{\partial p} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \mathcal{E}_2 \mathcal{A} \exp(-i\Delta z), \\ \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\alpha_2}{2} \right) \mathcal{E}_2^* &= i \frac{\omega_2^2}{2k_2 c^2} \frac{\partial\epsilon}{\partial p} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \mathcal{E}_1^* \mathcal{A} \exp(-i\Delta z), \\ \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\Gamma_B}{v} \right) \mathcal{A} &= i \frac{k_a}{4\pi v^2} \rho_0 \frac{\partial\epsilon}{\partial p} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^* \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^* \exp(i\Delta z), \end{aligned} \quad (6.14)$$

где  $\Delta = k_1 + k_2 - k_a$ . Для акустических фононов с частотой ниже  $10^{10}$  Гц условия фазового синхронизма всегда могут быть выполнены

( $\nu \sim 10^5$  см/с,  $|\omega_a| \ll \omega_1, \omega_2$ ,  $k_a \simeq 2k_1 \sin(\theta/2)$ ). Если постоянные  $\alpha_i$  и  $\Gamma_B$  малы, то возможно самовозбуждение. Однако в жидкостях коэффициент затухания достаточно велик:  $\Gamma_B/\nu \sim 10^4$  см $^{-1}$ .

Если возбуждение акустической волны происходит в условиях сильного затухания, то  $\partial \mathcal{A} / \partial z \approx i \Delta \mathcal{A}$  и из (6.14) следует

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\alpha_1}{2} \right) \mathcal{E}_1 &= i \frac{2\pi\omega_1^2}{k_1 c^2} \chi_B^{(3)} |\mathcal{E}_2|^2 \mathcal{E}_1, \\ \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\alpha_2}{2} \right) \mathcal{E}_2^* &= i \frac{2\pi\omega_2^2}{k_2 c^2} \chi_B^{(3)} |\mathcal{E}_1|^2 \mathcal{E}_2^*, \\ \chi_B^{(3)} &= \left[ \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)}{4\pi\nu} \right]^2 \frac{k_a \rho_0}{\Delta - i\Gamma_B/\nu}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Поскольку  $\text{Im} \chi_B^{(3)} > 0$ , то согласно (6.15) амплитуда  $\mathcal{E}_2$  будет возрастать в направлении назад ( $-z$ ), если  $G_B \equiv \frac{2\pi\omega_2^2}{k_2 c^2} \text{Im} \chi_B^{(3)} |\mathcal{E}_1|^2 > \frac{\alpha_2}{2}$ , в то время как амплитуда  $\mathcal{E}_1$  будет уменьшаться в направлении вперед. Типичный пример приведен на рис. 5, где порядка половины энергии импульса накачки перешла в распространяющийся назад импульс ВРМБ.

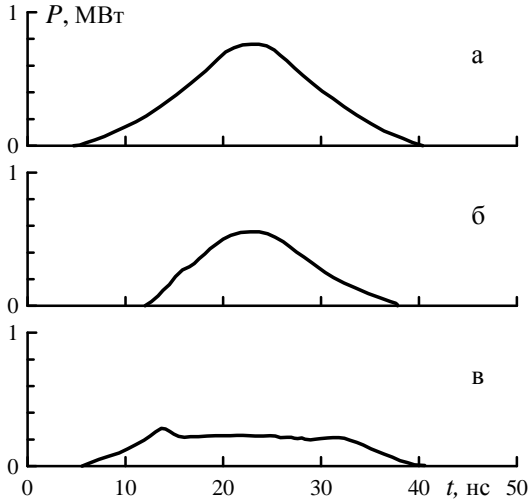


Рис. 5 Осциллограммы входного лазерного импульса (а), импульса ВРМБ назад (б) и прошедшего лазерного импульса (в) в случае этилового эфира [12].

В приближении заданного поля (6.15) имеет решение

$$|\mathcal{E}_2(z)|^2 = |\mathcal{E}_2(l)|^2 \exp\{(G_B - \alpha_2)(l - z)\}, \quad (6.16)$$

где коэффициент усиления  $G_B$  для ВРМБ равен

$$G_B = \frac{4\pi\omega_2^2}{|k_2|c^2} \operatorname{Im}\chi_B^{(3)} |\mathcal{E}_1|^2. \quad (6.17)$$

Типичные значения  $G_B$  в жидкостях составляют величину  $0.01 \div 0.03$  см/МВт, и в экспериментах приходится иметь дело со значительным истощением накачки. Пороговое значение в кварце порядка  $10^{11}$  Вт/см<sup>2</sup>. Время жизни акустических волн  $\tau_B = 1/2G_B$  порядка 1 нс при  $\omega_a/2\pi \approx 5$  ГГц. Поэтому при временах импульса накачки порядка 1 нс или меньше теория ВРМБ должна быть нестационарной.

*Задача 6.1.* Показать, что инкремент (при  $\omega_2 < \omega_1$ ) возрастания интенсивности вынужденного комбинационного рассеяния с частотой  $\omega_2$  на единице пути  $q_2$  (величина размерности 1/см) связан с интенсивностью обычного (*спонтанного*) рассеяния  $I_1$  с частотой  $\omega_1$  формулой

$$q_2 = \frac{(2\pi)^2}{k_2^2 \hbar \omega_1} \left( 1 - \exp\left[ -\frac{\hbar(\omega_2 - \omega_1)}{kT} \right] \right) I_1 \frac{dh_{21}}{do_2 d\omega_2},$$

где  $k_2 = \omega_2 \sqrt{\epsilon_2}/c$ , а  $\frac{dh_{21}}{do_2 d\omega_2}$  – дифференциальный коэффициент *экстинкции* света при рассеянии (отношение числа квантов, рассеянных (в элемент телесных углов  $do_2$ , в интервале частот  $d\omega_2$ ) в единицу времени в единице объема среды, к плотности потока фотонов в падающем свете).



## 7. Непараметрические резонансные процессы

Непараметрические эффекты, т. е. эффекты, при которых происходит изменение внутренней энергии нелинейной среды и становится не важна когерентность взаимодействия участвующих волн, описываются нечетными нелинейными восприимчивостями следующего вида:

$$\chi^{(2m-1)}(\omega_1 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_2 \dots - \omega_m + \omega_m). \quad (7.1)$$

При таком выборе нелинейности и набора частот одномерное уравнение для медленно меняющейся амплитуды поля (например,  $\mathcal{A}(\omega_1)$ ) будет иметь вид (см. вывод (4.10)):

$$\left( \frac{d}{dz} + \alpha(\omega_1) - \frac{2\pi i \omega_1}{cn(\omega_1)} \chi^{(2m-1)*} |\mathbf{E}(\omega_2)|^2 \dots |\mathbf{E}(\omega_m)|^2 \right) \mathcal{A}(\omega_1) = 0, \quad (7.2)$$

где  $\alpha(\omega_1) = \frac{2\pi \omega_1}{cn} \text{Im} \chi^{(1)}$  – коэффициент (линейного) поглощения для моды поля  $\mathbf{E}(\omega_1)$ ,

$$\chi^{(2m-1)*} = c^{(2m-1)} : \mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_2^* \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_m^* \mathbf{e}_m, \quad (7.3)$$

$\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}_i^*$  – единичные вектора в направлении  $\mathbf{E}(\omega_i)$  и  $\mathbf{E}^*(\omega_i)$ , соответственно.

Из (7.2) следуют две особенности непараметрических процессов:

- 1) пространственная "скорость" изменения амплитуды в точке  $z$  пропорциональна локальной (в той же точке) амплитуде этой же моды  $\mathcal{A}(\omega_1)$ ;
- 2) множитель синхронизма  $\exp(i\Delta kz)$  в решении не появится.

Вид уравнения (7.2) показывает, что вещественная часть эффективной восприимчивости (7.3) определяет локальное изменение (в данной точке  $z$ , где рассматриваются амплитуды (без фаз) всех взаимодействующих полей) постоянной распространения данной моды (эффект индуцированной дисперсии или, иначе, эффекты кроссвоздействия или самовоздействия). Мнимая часть эффективной восприимчивости (7.3) определяет дополнительное поглощение (или усиление) моды  $\mathcal{A}(\omega_1)$  за счет энергии других волн (эффект нелинейного или индуцированного поглощения).

Умножая (7.2) на  $\mathcal{E}^*(\omega_1)$ , находим уравнение (точнее, систему уравнений) для интенсивности соответствующих полей ( $I_1 = \frac{nc}{8\pi} |\mathcal{E}|^2(\omega_1)$ ):

$$\left( \frac{d}{dz} + \alpha(\omega_1) + \alpha_1^m(z) \right) I_1(z) = 0, \quad (7.4)$$

где  $\alpha_1^m \equiv \beta_1^m I(\omega_2)I(\omega_3)\dots I(\omega_m)$  и  $\beta_1^m \equiv \left(\frac{8\pi}{c}\right)^m \frac{\omega_1}{4n(\omega_1)\dots n(\omega_m)} \text{Im}\chi_*^{(2m-1)}$ .

## 7.1. Линейное поглощение (закон Бугера)

Рассмотрим случай, когда нелинейная восприимчивость среды не существенна. Пусть на среду нормально к границе раздела падает плоская монохроматическая волна  $\mathbf{E}(\omega)$ . Тогда решение (7.4) имеет вид

$$I(z) = I(0) \exp(-\alpha(\omega)z), \quad (7.5)$$

т. е. при линейном поглощении происходит экспоненциальное изменение интенсивности от координаты.

## 7.2. Двухфотонное поглощение

Пусть на прозрачную (в линейном приближении) среду нормально к границе раздела падает плоская монохроматическая волна  $\mathbf{E}(\omega)$ . Тогда из-за мнимой части кубической восприимчивости  $\chi^{(3)}(\omega = \omega - \omega + \omega)$  для интенсивности этой волны согласно (7.4) будет справедливо уравнение:

$$\frac{dI(z)}{dz} + \beta(\omega)I^2(z) = 0, \quad (7.6)$$

где  $\beta = \frac{16\pi^2\omega}{c^2n^2} \text{Im}\chi_*^{(3)}$  – коэффициент двухфотонного поглощения (требуется определенная аккуратность со статистическими весами при использовании  $\chi^{(3)}$  в вырожденном случае:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$ ).

Решение уравнения (7.6) имеет вид:

$$I(z) = \frac{I(0)}{1 + \beta z I(0)}. \quad (7.7)$$

Из-за двухфотонного поглощения нелинейный кристалл толщиной  $L$  является ограничителем для входного излучения интенсивностью  $I(0) \gg 1/\beta L$ , поскольку согласно (7.7)  $I(L) \simeq 1/\beta L$ .

## 7.3. Эффект насыщения

Таким образом, даже прозрачное в обычном (“линейном”) смысле этого термина вещество при достаточно большой интенсивности излучения накачки начинает поглощать падающий свет вследствие многофотонного поглощения. И наоборот, непараметрические процессы могут приводить к тому, что резонансно поглощающее (а значит очень сильно поглощающее) вещество может становиться “прозрачным” в результате насыщения резонансного перехода.

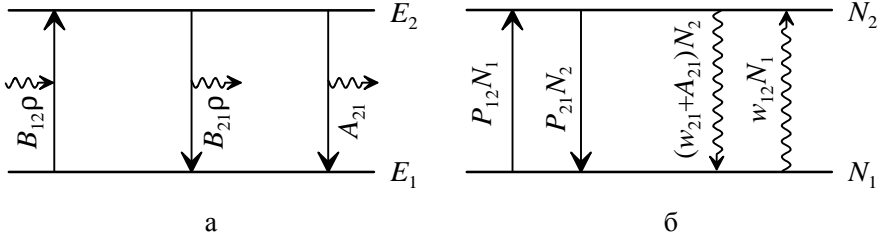


Рис. 6. Излучательные переходы (а) и кинетика населенности уровней (б) в двухуровневой системе.

Для описания эффекта насыщения рассмотрим простейшую кинетику населенности уровней в двухуровневой системе. Итак, имеем систему с двумя невырожденными энергетическими уровнями  $E_1$  и  $E_2$ , населенности которых равны  $N_1$  и  $N_2$ , соответственно, и  $N_1 + N_2 = N$ , где  $N$  полная концентрация двухуровневых атомов в системе. На систему падает внешнее резонансное излучение с объемной плотностью  $\rho = \frac{n}{c}I$  и частотой  $h\nu_{12} = E_2 - E_1$ . Тогда скорость изменения населенности верхнего уровня в результате резонансного поглощения определяется следующим балансным уравнением (см. рис. 6):

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{dN_1}{dt} = -\left(w_{21} + \frac{1}{\tau_0}\right)N_2 + w_{12}N_1 - P_{21}N_2 + P_{12}N_1, \quad (7.8)$$

где  $w_{12}$  и  $w_{21}$  – вероятности релаксационных безызлучательных процессов,  $P_{12}$  и  $P_{21}$  – вероятности вынужденных переходов. Вероятность  $P_{12} = \frac{2B_{12}\rho}{\pi\Delta\nu}$  ( $P_{21} = \frac{2B_{21}\rho}{\pi\Delta\nu}$ ), где  $\Delta\nu$  – спектральная ширина линии перехода,  $B_{12} = B_{21}$  – коэффициенты Эйнштейна, причем вероятность спонтанных переходов  $1/\tau_0 = A_{21} = B_{21}8\pi h\nu_{12}^3/c^3$ . Если вернуться к рассуждениям, основанным на такой характеристике среды как поляризация, два последних слагаемых в (7.8) представляют собой пересчет зависимости от времени поляризации среды на изменение населенностей рассматриваемых уровней:  $-\frac{2}{h\nu_{12}}\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{E}$ .

Исключая  $N_1 = N - N_2$  запишем (7.8) в виде

$$\frac{dN_2}{dt} = -\left(\frac{1}{\tau} + \frac{4B_{12}\rho}{\pi\Delta\nu}\right)N_2 + \left(w_{12} + \frac{2B_{12}\rho}{\pi\Delta\nu}\right)N, \quad (7.9)$$

где  $\tau = 1/(w_{12} + w_{21} + 1/\tau_0)$  – эффективное время релаксации населенности.

Рассмотрим стационарное решение (7.9), т. е. полагаем  $dN_2/dt = 0$ .

Тогда для населенности верхнего уровня имеем ( $I \simeq c\rho$ )

$$N_2(\rho) = \frac{w_{12} + \frac{2B_{12}\rho}{\pi\Delta\nu}}{\frac{1}{\tau} + \frac{4B_{12}\rho}{\pi\Delta\nu}}N$$

и, следовательно,

$$\delta N \equiv N_1 - N_2 = \frac{1 - 2\tau w_{12}}{1 + \frac{4\tau B_{12}I}{\pi c\Delta\nu}}N = \frac{1 - 2\tau w_{12}}{1 + \frac{I}{I_{\text{нас}}}}N = \frac{\delta N_0}{1 + \frac{I}{I_{\text{нас}}}}, \quad (7.10)$$

где обозначено  $I_{\text{нас}} = \frac{4\tau B_{12}I}{\pi c\Delta\nu}$ . За интенсивность насыщения принята такая величина интенсивности, которая приводит к уменьшению  $\delta N$  до  $\delta N_0/2$ . Поглощенная единицей объема мощность при этом составляет

$$\frac{dW}{dt} = \frac{h\nu_{12}P_{12}\delta N_0}{1 + \frac{I}{I_{\text{нас}}}}, \quad (7.11)$$

и, следовательно, с ростом объемной плотности внешнего резонансного излучения (т. е. при  $\rho \rightarrow \infty$ ) коэффициент поглощения двухуровневой системы стремится к нулю (т. е. происходит насыщение перехода).

При выводе (7.10) предполагалось облучение двухуровневой системы при точном резонансе. Рассмотрим случай, когда внешнее излучение имеет частоту, не совпадающую точно с частотой  $\nu_{12}$ .

Ранее был рассмотрен ангармонический осциллятор как модель нелинейной поляризуемости. Было найдено, что, линейная поляризуемость свободного электрона, обусловленная дипольным взаимодействием, имеет вид (см. (3.12))

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2 N}{mD(\omega_i)},$$

где  $D(\omega) \equiv \omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega$ . Следовательно, можно ввести единый для всех поглощающих молекул нормированный профиль однородной линии

$$g(\omega) = \frac{2}{\pi\Delta\omega_0} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_0/2}\right)^2} \quad (7.12)$$

— лоренцев контур с полной шириной линии по уровню 0.5 от максимального значения  $\Delta\omega_0 \simeq \gamma$ . Условие нормировки имеет обычный вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)d\omega = 1.$$

Наличие теплового движения молекул приводит к тому, что

вероятности поглощательных переходов различны для разных молекул. В этом важном случае неоднородного уширения нормированный профиль имеет вид гауссова контура

$$g(\omega) = \frac{2}{\Delta\omega_\Gamma} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{(\Delta\omega_\Gamma/2)^2} \ln 2\right], \quad (7.13)$$

где  $\Delta\omega_\Gamma = 2\omega_0 \left(\frac{2kT}{Mc^2} \ln 2\right)^{1/2}$ . На рис. 7 показаны соответствующие нормированные кривые  $g(\omega)$  для однородно и неоднородно уширенных линий одинаковой ширины. Следует заметить, гауссов контур намного "компактнее", чем лоренцев, при одинаковой ширине линии  $\Delta\omega_\Gamma = \Delta\omega_0$  (см. рис. 7). Максимальные значения функции  $g(\omega)$  у этих контуров различаются в 1.47 раз.

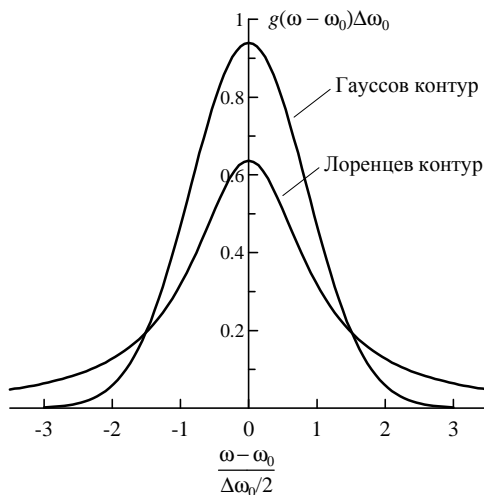


Рис. 7. Сравнение спектральных линий при однородном (Лоренцев контур) и неоднородном (Гауссов контур) уширении.

При введении профиля линии однородного поглощения (7.12) заметим, что в соответствии с частотной зависимостью линейной поляризуемости  $\alpha(\omega)$  изменяется вероятность вынужденного перехода  $P_{12}$  и в  $I_{\text{нас}}$  (7.10) значение  $B_{12}$  заменится на  $B_{12}g(\omega)/g(\omega_0)$ . Таким образом, (7.11) преобразуется к следующему виду

$$\frac{dW}{dt} = \frac{h\nu_{12}P_{12}\delta N_0(\gamma/2)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2(1 + I^\omega/I_{\text{нас}})} \quad (7.14)$$

и, следовательно, зависимость спектрального профиля линии с учетом насыщения имеет вид:

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{1 + I^\omega/I_{\text{нас}}} \gamma/2}{(\omega - \omega_0)^2 + (1 + I^\omega/I_{\text{нас}})(\gamma/2)^2}. \quad (7.15)$$

Ширина такой линии из-за эффекта насыщения увеличена:

$$\Delta\omega_I = \sqrt{1 + \frac{I^\omega}{I_{\text{нас}}}} \Delta\omega_0. \quad (7.16)$$

При наличии неоднородного уширения монохроматическое излучение может резонансно возбудить лишь небольшую долю молекул. Эффект насыщения в этом случае приводит к появлению провалов Беннета шириной насыщенной однородной линии  $\gamma_{\text{нас}} = \sqrt{1 + I^\omega/I_{\text{нас}}} \gamma$  и глубиной  $4I^\omega/I_{\text{нас}}/\gamma$  в широком гауссовом профиле. При этом резко уменьшается число молекул в определенном диапазоне скоростей.

*Пример 7.1.* Оценим доплеровскую ширину линии для D-линии натрия ( $M = 23$ ,  $\lambda = 0.5891$  мкм) при температуре 500 К. Согласно (7.13) получим  $\delta\lambda_D = \lambda\Delta\omega_I/\omega = 10^{-6}$  мкм.

## 8. Самофокусировка

### 8.1. Уравнение для слабоизменяющихся пучков в слабонеоднородных средах

Самофокусировка – один из эффектов самовоздействия (изменения пространственной и временной структуры поля светового пучка вследствие наведения в среде самим пучком оптических неоднородностей). В квадратичных членах такой нелинейный вклад отсутствует: они содержат только частоты  $2\omega$  и  $0$ . Первый отличный от нуля элемент возникает от кубичной нелинейности и содержится в членах вида  $\mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E}^*$  с исходной частотой  $\omega = \omega + \omega - \omega$ :

$$P_i^{(3)}(\omega) = \chi_{ijkl}(\omega = \omega + \omega - \omega)E_j(\omega)E_k(\omega)E_l^*(\omega).$$

Для изотропной среды (жидкость или газ) интересующий нас вклад связан с поляризацией третьего порядка, имеющей в общем случае вид

$$\mathbf{P}^{(3)} = \alpha(\omega)|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} + \beta(\omega)\mathbf{E}^2\mathbf{E}^*. \quad (8.1)$$

В прозрачной изотропной среде коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  – вещественные четные функции частоты, причем (см. задачу 8.1)

$$\alpha(\omega) = \chi_{1122} + \chi_{1212}, \quad \beta(\omega) = \chi_{1221}. \quad (8.2)$$

Т. е. в отсутствии дисперсии  $c^{(3)}$

$$\alpha(0) = 2\beta(0).$$

Для линейно поляризованного поля  $\mathbf{E}$  выражение (8.1) упрощается (см. задачу 8.2):

$$\mathbf{P}^{(3)} = [\alpha(\omega) + \beta(\omega)]|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} = \chi_{1111}|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}.$$

Аналогичное упрощение возникает и при круговой поляризации:

$$\mathbf{P}^{(3)} = \alpha(\omega)|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} = [\chi_{1122}(\omega) + \chi_{1212}(\omega)]|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}.$$

В обоих случаях индукция поляризована так же, как и  $\mathbf{E}$ . В общем случае эллиптической поляризации направления  $\mathbf{P}^{(3)}$  и  $\mathbf{E}$  не совпадают.

Введем обозначение

$$\eta = \frac{\omega^2}{c^2}n_2 = \begin{cases} 4\pi\omega^2(\alpha + \beta)/c^2 & \text{для линейно поляризованного поля,} \\ 4\pi\omega^2\alpha/c^2 & \text{для поляризованной по кругу волны.} \end{cases} \quad (8.3)$$

Тогда

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{D}^{(3)} = (\varepsilon + n_2 |\mathbf{E}|^2) \mathbf{E} = \left( \varepsilon + \frac{c^2}{\omega^2} \eta |\mathbf{E}|^2 \right) \mathbf{E}. \quad (8.4)$$

В этом случае, как легко проверить, волновое уравнение

$$\text{rot rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0, \quad (8.5)$$

$$\text{div} \mathbf{D} = 0 \quad (8.6)$$

допускает точное решение в виде плоской монохроматической волны

$$\mathbf{E} = \mathcal{E}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) \quad (8.7)$$

с линейной или круговой поляризацией. При этом поле остается поперечным, т. к. подстановка (8.4) с  $|\mathbf{E}|^2 = |\mathcal{E}_0|^2$  в (8.6) дает  $\text{div} \mathbf{E} = 0$ . Следовательно,  $\text{rot rot} \mathbf{E} = -\tilde{N}^2 \mathbf{E}$  и, подставляя (8.7) в (8.5), получим дисперсионное соотношение

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon + \eta |\mathcal{E}_0|^2. \quad (8.8)$$

Фазовая скорость  $\omega/k$  оказывается зависящей от амплитуды волны. Для анализа проявления эффектов нелинейности представляет интерес рассмотреть распространение почти монохроматической волны вида

$$\mathbf{E} = \mathcal{E}_0(t, \mathbf{r}) \exp(ik_0 z - i\omega t), \quad (8.9)$$

где  $\mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})$  – медленно меняющаяся функция времени и координат, а величина вектора  $\mathbf{k}_0$ , направленного вдоль оси  $z$ , задана в соответствии с условием

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon.$$

В силу малости  $\text{grad} |\mathbf{E}_0|^2$  и нелинейных членов

$$\text{div} \mathbf{E} \approx -\eta \frac{c^2}{\varepsilon \omega^2} \mathbf{E} \text{grad} |\mathcal{E}_0|^2 \approx 0,$$

следовательно, подставляя (8.9) в (8.5) для первого слагаемого, получим

$$\text{rot rot} \mathbf{E} \approx -\tilde{N}^2 \mathbf{E} \approx -\left( -k_0^2 \mathcal{E}_0 + 2ik_0 \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial z} + \tilde{N}_\perp^2 \mathcal{E}_0 \right) \exp(ik_0 z - i\omega t).$$

Оценим  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}$ . Используя разложение Фурье

$$\mathcal{E}_0(t) \exp(ik_0 z) = \mathcal{E}_{00} + \mathcal{E}_\alpha \exp(-i\alpha t) + \dots,$$

где  $\alpha \ll \omega$ , находим



$$D^{(1)} = \varepsilon \mathcal{E}_0(t) \exp(ik_0 z - i\omega t) \simeq \varepsilon(\omega) \mathcal{E}_0 \exp(-i\omega t) + \varepsilon(\omega + \alpha) \mathcal{E}_\alpha \exp(-i(\omega + \alpha)t).$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} D^{(1)} &\simeq -\omega^2 \varepsilon(\omega) \mathcal{E}_0 \exp(-i\omega t) - (\omega + \alpha)^2 \varepsilon(\omega + \alpha) \mathcal{E}_\alpha \exp(-i(\omega + \alpha)t) \simeq \\ &\simeq \left[ -\omega^2 \varepsilon(\omega) \mathcal{E}_0 - (\omega + \alpha)^2 \left( \varepsilon(\omega) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \alpha \right) \mathcal{E}_\alpha \exp(-i\alpha t) \right] \exp(-i\omega t) \simeq \\ &\simeq \left[ -\omega^2 \varepsilon(\omega) \mathcal{E}_0 - \left( \varepsilon(\omega) \omega^2 + 2\omega \alpha \varepsilon(\omega) + \omega^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \alpha \right) \mathcal{E}_\alpha \exp(-i\alpha t) \right] \exp(-i\omega t) \simeq \\ &\simeq - \left[ \omega^2 \varepsilon(\omega) \mathcal{E}_0(t) + i \frac{\partial(\omega^2 \varepsilon)}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_0(t) \right] \exp(ik_0 z - i\omega t) = \\ &= -c^2 \left[ k_0^2 \mathcal{E}_0(t) + 2i \frac{k_0}{u} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_0(t) \right] \exp(ik_0 z - i\omega t), \end{aligned}$$

где введена групповая скорость  $u$ , равная по определению

$$u = \left( \frac{dk_0}{d\omega} \right)^{-1}. \quad (8.10)$$

Для производной  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D}^{(3)}$  достаточна оценка

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D}^{(3)} \simeq -\eta(\omega) |\mathcal{E}_0|^2 \mathbf{E}.$$

Подставив полученные выражения в (8.5), приходим к уравнению для слабоизменяющихся пучков в слабонеоднородных средах

$$2ik_0 \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}_0 = -\tilde{N}_\perp^2 \mathcal{E}_0 - \eta(\omega) |\mathcal{E}_0|^2 \mathcal{E}_0. \quad (8.11)$$

Комбинация производных в левой части (8.11) выражает тот факт, что возмущения амплитуды переносятся в направлении распространения волны с групповой скоростью. Перейдя в (8.11) к новой переменной  $t' = t - z/u$ , получим нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_0 = -\frac{1}{2ik_0} \tilde{N}_\perp^2 \mathcal{E}_0 - \frac{\eta(\omega)}{2ik_0} |\mathcal{E}_0|^2 \mathcal{E}_0, \quad (8.12)$$

для которого получено много интересных и фундаментальных результатов (см., например, [11]).

## 8.2. Неустойчивость неограниченной плоской волны

Решение (8.12) в случае линейно поляризованной волны может быть представлено в форме (8.9) с медленно меняющейся амплитудой

(учитываем  $k \simeq k_0 + \frac{\eta|\mathcal{E}_0|^2}{2k_0}$ )

$$\mathcal{E}_0(z) = \mathcal{E}_{00} \exp\left(iz \frac{\eta|\mathcal{E}_{00}|^2}{2k_0}\right), \quad (8.13)$$

где  $\mathcal{E}_{00}$  – вещественный вектор. Подставляя решение (8.13) в (8.12), убеждаемся, что это точное решение. Предположим, что амплитуда этой волны подверглась малому возмущению:

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{r}) = [\mathcal{E}_{00} + \delta\mathcal{E}(\mathbf{r})] \exp\left(iz \frac{\eta|\mathcal{E}_{00}|^2}{2k_0}\right). \quad (8.14)$$

Пусть  $\delta\mathcal{E}$  направлено вдоль  $\mathcal{E}_{00}$ . Подставляя (8.14) в (8.12), получим

$$i2k_0 \frac{\partial \delta\mathcal{E}}{\partial z} = -\tilde{N}_+^2 \delta\mathcal{E} - \eta(\omega)|\mathcal{E}_{00}|^2 (\delta\mathcal{E} + \delta\mathcal{E}^*). \quad (8.15)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\delta\mathcal{E} = A \exp\{i(\mathbf{q}\mathbf{r} + \gamma z)\} + B^* \exp\{-i(\mathbf{q}\mathbf{r} + \gamma z)\}, \quad AB^* \neq 0, \quad (8.16)$$

где вектор  $\mathbf{q}$  находится в плоскости  $xu$  и

$$\gamma = \pm \frac{q}{2k_0} \sqrt{q^2 - 2\eta\mathcal{E}_{00}^2}.$$

При  $\eta > 0$  и

$$q^2 < 2\eta\mathcal{E}_{00}^2 \quad (8.17)$$

$\gamma$  мнимо и возмущение (8.16) экспоненциально возрастает. Одно из проявлений этой неустойчивости – самофокусировка ограниченного по ширине пучка. В пучке с характерным радиусом  $R$  возможны возмущения с поперечными к оси пучка длинами волн меньше  $R$ . Поэтому пучок будет неустойчив относительно самофокусировки при

$$\eta\mathcal{E}_{00}^2 R^2 \gtrsim 1,$$

и, следовательно, критическое значение мощности пучка не зависит от сечения пучка.

### 8.3. Самофокусировка и дефокусировка гауссовых пучков

В линейной среде без искажений распространяются гауссовы пучки

$$A = A_0 \exp(ik_0 s) \quad (8.18)$$

с действительной амплитудой

$$A_0 = \frac{E_0}{f(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2 f^2(z)}\right) \quad (8.19)$$

со сферическим фронтом

$$s = \frac{r^2 f'(z)}{2f(z)} + \varphi(z),$$

где  $z$  – продольная координата, а  $r$  – поперечная. Функция  $f(z)$  называется безразмерной шириной пучка,  $f(0) = 1$ . Распределение интенсивности в поперечном сечении имеет вид гауссовой кривой

$$I(z, r) = I_0(z) \exp\left(-\frac{r^2}{a^2 f^2(z)}\right),$$

характеризующейся радиусом (полушириной)  $a$  по уровню интенсивности, равному  $1/e$  от максимальной при  $z = 0$ . Каждый луч идет по траектории, для которой  $r/f = r_0$ , где  $r_0$  – координата луча при  $z = 0$ . При распространении сохраняется профиль пучка, но его параметры (диаметр и радиус кривизны) могут изменяться.

Нелинейное уравнение Шредингера (8.12) в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$2ik_0 \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial r}\right) - \eta |\mathcal{E}_0|^2 \mathcal{E}_0. \quad (8.20)$$

Подставляя  $\mathcal{E}_0$  в форме (8.18) в (8.20) и отделяя мнимую и действительную части, получим

$$\frac{\partial A_0^2}{\partial z} + \frac{\partial A_0^2}{\partial r} \frac{\partial s}{\partial r} + A_0^2 \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{A_0^2}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = 0, \quad (8.21)$$

$$2k_0^2 \frac{\partial s}{\partial z} + k_0^2 \left(\frac{\partial s}{\partial r}\right)^2 = \frac{1}{A_0} \frac{\partial^2 A_0}{\partial r^2} + \frac{1}{A_0 r} \frac{\partial A_0}{\partial r} + \eta |A_0|^2. \quad (8.22)$$

Первое из этих уравнений выражает закон сохранения энергии (уравнение переноса), а второе описывает искажение волнового фронта из-за дифракции и нелинейности. Подстановкой  $A_0(z, r)$  и  $s(z, r)$  легко убедиться, что для рассматриваемого гауссового пучка (8.21) удовлетворяется автоматически. Естественно, что и полная мощность излучения неизменна в любом сечении  $z$ :

$$\begin{aligned}
P(z) &= \int_0^\infty \frac{cn|A_0|^2}{8\pi} 2\pi r dr = \\
&= \int_0^\infty \frac{cnE_0^2}{8f^2} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2f^2}\right) d(r^2) = \frac{cnE_0^2a^2}{8} = \text{const.}
\end{aligned} \tag{8.23}$$

Уравнение (8.22) после подстановки (8.19) примет вид

$$2k_0^2 \frac{\partial s}{\partial z} + k_0^2 \left( \frac{\partial s}{\partial r} \right)^2 = \frac{r^2}{a^4 f^4} - \frac{2}{a^2 f^2} + \eta \left| \frac{E_0}{f} \right|^2 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2 f^2}\right).$$

В приосевой области  $\exp(-r^2 a^{-2} f^{-2}) \simeq 1 - r^2 a^{-2} f^{-2}$ , следовательно,

$$\begin{aligned}
2k_0^2 \left( \frac{r^2 f''}{2f} - \frac{r^2 (f')^2}{2f^2} + \varphi' \right) + k_0^2 r^2 \left( \frac{f'}{f} \right)^2 = \\
= \frac{r^2}{a^4 f^4} - \frac{2}{a^2 f^2} + \eta \left| \frac{E_0}{f} \right|^2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2 f^2} \right).
\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$f''(z) = \frac{1}{a^4 f^3 k_0^2} - \frac{\eta E_0^2}{a^2 f^3 k_0^2}, \quad \varphi'(z) = -\frac{1}{a^2 f^2 k_0^2} - \frac{\eta E_0^2}{2f^2 k_0^2}. \tag{8.24}$$

Введем характерные длины, связанные соответственно с дифракцией пучка и с нелинейностью среды:

$$R_D = k_0 a^2, \quad R_{NL} = \frac{k_0 a}{\sqrt{\eta} E_0}.$$

Здесь дифракционная длина пучка  $R_D = 2\pi a^2/\lambda$  (для оценки:  $R_D \simeq 6$  м при  $\lambda = 1$  мкм и  $a = 1$  мм). Величину  $R_D/z$  называют числом Френеля. С учетом принятых обозначений получим

$$f'' = \frac{1}{f^3} \left( \frac{1}{R_D^2} - \frac{1}{R_{NL}^2} \right). \tag{8.25}$$

В случае  $R_D \leq R_{NL}$  (8.25) можно записать в виде

$$f'' = \frac{1}{f^3} \frac{1}{R_\Delta^2}, \quad \frac{1}{R_\Delta} = \sqrt{\frac{1}{R_D^2} - \frac{1}{R_{NL}^2}}. \tag{8.26}$$

Уравнение (8.26) имеет решение

$$f^2 = \left( 1 \pm \frac{z}{R_\Delta} \right)^2 + \left( \frac{z}{R_\Delta} \right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{2z}{R_\Delta} \right)^2, \tag{8.27}$$

где  $1/R_\Delta = df/dz|_{z=0}$  – начальная кривизна волнового фронта,  $\alpha = a/R_\Delta$  – начальная расходимость пучка. Из (8.27) видно, что в рассматриваемом случае дифракция ограничивает поле (при выборе знака "+" имеем чисто расходящийся пучок).

В случае  $R_D \geq R_{NL}$  (8.25) можно записать в виде

$$f'' = -\frac{1}{f^3} \frac{1}{R_\Delta^2}, \quad \frac{1}{R_\Delta} = \sqrt{-\frac{1}{R_D^2} + \frac{1}{R_{NL}^2}}. \quad (8.28)$$

Уравнение (8.28) имеет простое решение

$$f^2 = \left(1 - \frac{z}{R_\Delta}\right)^2 - \left(\frac{z}{R_\Delta}\right)^2 = 1 - \frac{2z}{R_\Delta}. \quad (8.29)$$

Из (8.29) следует, что при  $z = R_\Delta/2$  имеем фокус, т. е. поперечный размер пучка  $f = 0$ . Вблизи фокуса  $f'_z \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow R_\Delta/2$ , т. е. лучи входят в фокус почти под прямым углом к оси. В эксперименте ситуация с  $f = 0$  не реализуется из-за неучтенных в данном рассмотрении механизмов (например, пробоя среды).

Волноводному распространению ( $f = 1$ ) соответствует условие  $R_D = R_{NL}$  (т. е.  $E_0^2 a^2 \eta = 1$ ), выполняющееся при мощности пучка (используем (8.23))

$$P_{кр} = \frac{cnE_0^2 a^2}{8} = \frac{cn}{8\eta} = \frac{c^3 n}{8\omega^2 n_2} = \frac{\lambda_0^2 cn}{32\pi^2 n_2}, \quad (8.30)$$

где  $n = \sqrt{\epsilon}$  – коэффициент преломления невозмущенной среды, квадратичная нелинейность  $n_2$  определена в (8.4),  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$  – длина волны в вакууме. Критическая мощность не зависит от радиуса пучка. Лазерное излучение с  $\lambda_0 = 1$  мкм в среде с керровской нелинейностью  $n_2 = 10^{-11}$  СГСЕ имеет критическую мощность, равную  $P_{кр} \approx 10$  кВт. В жидких кристаллах, обладающих весьма большой нелинейностью  $n_2 = 10^{-4}$  СГСЕ, критическая мощность порядка одного милливатта. Согласно (8.29) при значениях  $P > P_{кр}$  происходит лавинное схлопывание пучка на конечном расстоянии

$$z_\phi = \frac{R_\Delta}{2} = \frac{R_D}{2\sqrt{P/P_{кр} - 1}}, \quad (8.31)$$

при обратном соотношении преобладает дифракционное распыление.

## 8.4. Тепловая самофокусировка

Изменение диэлектрической проницаемости может происходить

вследствие нагрева вещества:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} (T - T_0). \quad (8.32)$$

Температура среды устанавливается в соответствии с уравнением теплопроводности

$$Q = \frac{\delta c n A_0^2}{8\pi} = -\chi \tilde{N}^2 T, \quad (8.33)$$

где  $\chi$  – коэффициент теплопроводности,  $\delta$  – коэффициент поглощения,  $n = \sqrt{\varepsilon_0}$ ,  $A_0(r)$  – амплитуда гауссова пучка (8.19). Если пренебречь диффузией тепла вдоль оси гауссова пучка (т. е. полагая  $\partial^2 T / \partial z^2 = 0$ ), то решение (8.33) выражается через экспоненциальный интеграл, допускающий вблизи оси приближенное представление в виде

$$T \simeq T(0, z) - \frac{\delta P r^2}{4\pi \chi a^2 f^2},$$

где значение полной мощности гауссова пучка  $P$  задается (8.23). Тогда (8.32) примет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} [T(0, z) - T_0] - \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \frac{\delta P r^2}{4\pi \chi a^2 f^2}.$$

При такой зависимости  $\varepsilon$  от радиуса и условии  $\partial \varepsilon / \partial T > 0$  аналогично (8.25) получим, что ширина пучка описывается уравнением:

$$f''' = \frac{1}{f^3 R_D^2} - \frac{1}{f R_T^2}, \quad R_T = a \sqrt{\frac{4\pi \chi}{\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \delta P}}. \quad (8.34)$$

Теперь волноводному распространению светового пучка  $f = 1$  ( $R_D = R_T$ ) соответствует критическая мощность

$$P_T = \frac{\lambda_0^2 \chi}{\pi a^2 \delta \varepsilon_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}}. \quad (8.35)$$

В типичных случаях (оптически прозрачные стекла и кристаллы)  $P_T = 0.01 \div 0.1$  Вт.

Заметим, что из-за различия показателя степени  $f$  в слагаемых (8.34) дифракция будет нарастать вблизи фокуса более быстро, чем нелинейная рефракция, и это приведет к ограничению поля. Это связано с рассасыванием тепла из-за поперечной термодиффузии. Согласно (8.25) при нетепловых механизмах (например, при стрикционной самофокусировке), конкуренция дифракции и нелинейной рефракции

отсутствует.

## 8.5. Самофокусировка в поглощающих средах

Из-за поглощения мощность пучка в реальных средах уменьшается:

$$E_0 = E_0(0) \exp\left(-\frac{\delta}{2}z\right),$$

где  $\delta = k\varepsilon''/(2\varepsilon')$  – коэффициент затухания волны,  $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ . В результате нелинейная рефракция будет уменьшаться по мере распространения волны:

$$f'' = \frac{1}{f^3 R_D^2} - \frac{\exp(-\delta)}{f^{NL} R_{NL}^2}. \quad (8.36)$$

Сильное поглощение ограничивает зону эффективной нелинейной рефракции ( $z \lesssim 1/\delta$ ) и уменьшает тем самым фокусирующие свойства среды.

## 8.6. Дефокусировка световых пучков

До сих пор мы рассматривали поведение пучков в фокусирующих средах ( $n_2 > 0$ ). Существует большой класс нелинейных механизмов, которые приводят к отрицательному значению  $n_2$ . Хорошо известно, что жидкости, газы и многие кристаллы уменьшают свою диэлектрическую проницаемость в связи с уменьшением плотности при нагреве ( $dn/dT > 0$ ) и это приводит к *тепловой дефокусировке*. При определенных условиях резонансное воздействие лазерного пучка на двухуровневую среду может привести к уменьшению показателя преломления с увеличением интенсивности света. В таких случаях  $\eta$  отрицательно и из решения (8.24) видно, что пучок расходится как из-за дифракции, так и благодаря нелинейной рефракции.

Развитие тепловой дефокусировки в жидкостях и газах сильно зависит от поперечной конвекции, влияющей на распределение температуры в поперечном сечении пучка, а значит и на нелинейную тепловую линзу. В движущейся поперек светового пучка среде тепловая дефокусировка проявляется в самоотклонении пучка навстречу потоку в более холодную и оптически более плотную часть среды (рис. 8). В случае самофокусирующей среды с  $dn/dT > 0$  пучок отклоняется в направлении потока.

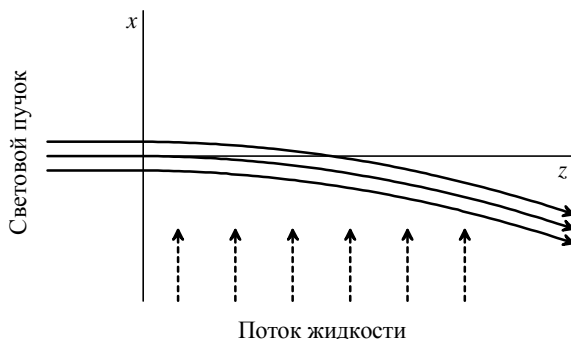


Рис. 8. Самоотклонение светового пучка при тепловой дефокусировке в движущейся среде.

Тепловая дефокусировка является одним из основных нелинейных эффектов в оптике атмосферы. Она ограничивает предельные возможности передачи большой энергии или мощности на дальние расстояния с помощью лазерных пучков.

*Задача 8.1.* Доказать, что для прозрачной изотропной среды с центром инверсии поляризация третьего порядка имеет в общем случае вид

$$\mathbf{P}^{(3)} = \alpha(\omega)|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} + \beta(\omega)\mathbf{E}^2\mathbf{E}^*,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – вещественные четные функции частоты, причем

$$\alpha(\omega) = \chi_{1122} + \chi_{1212}, \quad \beta(\omega) = \chi_{1221}.$$

*Задача 8.2.* Упростить выражение для нелинейной поляризации третьего порядка, ответственной за отклик среды на частоте первичной волны, имеющее для изотропной среды в общем случае вид

$$\mathbf{P}^{(3)} = \alpha(\omega)|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} + \beta(\omega)\mathbf{E}^2\mathbf{E}^*,$$

- а) для линейно поляризованного электрического поля  $\mathbf{E}$ ;
- б) для циркулярно поляризованного электрического поля  $\mathbf{E}$ .



## 9. Распространение импульсного излучения в нелинейных средах

### 9.1. Сильные электромагнитные волны

Рассмотрим среду без дисперсии, так что индукция  $\mathbf{D}$  в заданный момент времени в каждой точке определяется только величиной  $\mathbf{E}$  в этой же точке в тот же момент времени. Дополнительно предположим, что за счет независимо изменяющегося во времени внешнего воздействия происходит управление параметрами этой среды, т. е.  $\mathbf{D}(t, \mathbf{E})$  – произвольная функция двух переменных. Пренебрежение поглощением и дисперсией делает возможным построение точного решения для такой сильно нелинейной среды, обобщающего обычную одномерную плоскую волну линейного приближения.

Пусть среда изотропна (т. е. направления  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  совпадают) и волна распространяется в направлении оси  $z$ , электрическое поле направлено вдоль оси  $x$ , а магнитное – вдоль оси  $y$ . Тогда уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(t, \mathbf{E})$$

принимают вид

$$-\frac{\partial D}{\partial z} = \frac{\varepsilon(t, E)}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad -\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (9.1)$$

где по определению

$$\varepsilon(t, E) = \frac{dD}{dE}.$$

Ищем решение, в котором  $D(t, z)$  и  $B(t, z)$  могут быть представлены как функция одна другой:  $D = D(B)$ ,  $B = B(D)$ . Тогда уравнения (9.1) примут вид

$$-\frac{\partial D}{\partial z} = \frac{\varepsilon(t, E)}{c} \frac{\partial B}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial t}, \quad -\frac{\partial B}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (9.2)$$

Эти уравнения совместны (имеют отличные от нуля значения неизвестных  $\partial D/\partial z$  и  $\partial D/\partial t$ ) при условии, что детерминант равен нулю:

$$\left( \frac{\partial B}{\partial D} \right)^2 = \frac{1}{\varepsilon(t, E)}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial B}{\partial D} = \pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon(t, E)}}. \quad (9.3)$$

Подставив (9.3) в одно из уравнений (9.2), получим

$$-\frac{(\partial D / \partial t)_z}{(\partial D / \partial z)_t} = \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_D = \pm \frac{c}{\sqrt{\epsilon(t, E)}}.$$

Отсюда следует, что

$$z \mp \int \frac{cdt}{\sqrt{\epsilon(t, E)}} = G(D),$$

где  $G(D)$  может быть произвольной функцией от  $D$ . Обозначив обратную функцию как  $f$ , имеем

$$D = f\left(z \mp \int_0^t \frac{cdt}{\sqrt{\epsilon(t, E)}}\right), \quad (9.4)$$

где два знака отвечают двум направлениям распространения волны. После выбора функции  $f$  формула (9.4) определяет в неявном виде зависимость  $D(t, z)$ .

В нелинейных средах при отсутствии явной зависимости  $\epsilon$  от времени (9.4) переходит в известную формулу (см. [1], §111):

$$E = \tilde{f}\left(z \mp \frac{ct}{\sqrt{\epsilon(E)}}\right). \quad (9.5)$$

## 9.2. Самообострение импульса

Согласно (9.5) по мере распространения волны ее профиль искажается, поскольку разные участки бегут с разными скоростями. Обычно  $\epsilon(E)$  убывает с ростом  $E$  (стремится к насыщению). Тогда точки профиля с большими значениями  $E$  бегут с большими скоростями, в результате чего увеличивается крутизна переднего фронта профиля (рис. 9).

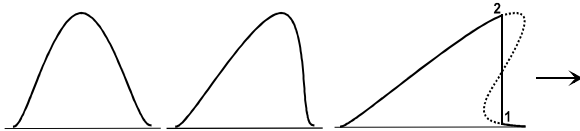


Рис. 9. Самообострение импульса в нелинейной среде.

В некоторый момент возникает перегиб профиля, после чего он должен был бы стать неоднозначным. В действительности в этот момент в волне возникает электромагнитная ударная волна – разрыв величин  $E$  и  $H$ . Граничные условия на разрыве для плоской поперечной волны имеют вид

$$H_2 - H_1 = \frac{v}{c}(D_2 - D_1), \quad E_2 - E_1 = \frac{v}{c}(H_2 - H_1),$$

где индексы 1 и 2 относятся к значениям величин соответственно впереди и позади фронта. Перемножив эти два равенства, найдем скорость ударной волны

$$v^2 = c^2 \frac{E_2 - E_1}{D_2 - D_1} \simeq \frac{c^2}{\epsilon \left( \frac{E_1 + E_2}{2} \right)}.$$

Положение разрыва на профиле волны определяется условием равенства двух площадей, образованных на профиле вертикальной прямой (см. рис. 9), т. е. выполняется закон постоянства интегралов от решений. В скачке происходит диссипация энергии (разность векторов Пойтинга с поправкой на изменение скоростей изменения внутренней энергии при прохождении скачка)

$$Q \simeq -\frac{v}{48\pi} \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial E} \right|_{E_1} (E_2 - E_1)^2.$$

Экспериментальные наблюдения по самообострению импульса (формированию крутого фронта), связанного только с зависимостью  $\epsilon$  от интенсивности, по-видимому, отсутствуют.

### *Самообострение за счет дисперсии групповой скорости*

Однако в случае, когда групповая скорость имеет линейную дисперсию, например, когда частота лазера лежит вблизи полосы поглощения, можно ожидать, что обострение импульса произойдет на гораздо меньшей длине. Фазовая модуляция модифицирует частотный спектр импульса; форма его изменяется за счет линейной дисперсии групповой скорости. Самообострение импульса наблюдалось в парах Rb, когда частота импульсного лазера на красителе лежала немного ниже перехода  $s \rightarrow p$ .

## **9.3. Самообострение ограниченных самофокусирующихся импульсов**

Согласно (8.11) уравнение для слабоизменяющихся пучков в слабонеоднородных средах имеет вид

$$2ik_0 \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}_0 = -\tilde{N}_+^2 \mathcal{E}_0 - \eta(\omega) |\mathcal{E}_0|^2 \mathcal{E}_0.$$

Комбинация производных в левой части этого уравнения выражает тот факт, что возмущения амплитуды переносятся в направлении распространения волны с групповой скоростью. Перейдя к новой переменной  $\xi = t - z/u$ , получим НУШ (8.12), имеющий в этих новых переменных решение для гауссового пучка в прежнем виде (см. (8.18) и (8.19)) с

$$E(\xi, r, z) = \frac{E_0(\xi)}{f(\xi, z)} \exp \left( -\frac{r^2}{2a^2 f^2(\xi, z)} \right), \quad (9.6)$$

где безразмерная ширина пучка  $f$  зависит уже от двух переменных  $\xi$  и  $z$ , причем, как и раньше,  $1/R = df/dz|_{z=0}$  – начальная кривизна волнового фронта;  $\alpha = a/R$  – начальная расходимость пучка. Полная мощность пучка тоже зависит от  $\xi$ :

$$P(\xi, z) = \int_0^\infty \frac{cn|E|^2}{8\pi} 2\pi r dr = \frac{cna^2 E_0^2(\xi)}{8}.$$

Для случая самофокусировки ( $R_D \geq R_{NL}$ ) согласно (8.29)  $f$  определяется характерной длиной  $R_\Delta$ , связанной с дифракцией пучка:

$$f^2(\xi, z) = 1 - \frac{2z}{R_\Delta(\xi)}, \quad (9.7)$$

где

$$\frac{1}{R_\Delta} = \sqrt{-\frac{1}{R_D^2} + \frac{1}{R_{NL}^2(\xi)}}, \quad R_D = k_0 a^2, \quad R_{NL} = \frac{k_0 a}{\sqrt{\eta} E_0(\xi)}.$$

Покажем, что в случае самофокусировки происходит обострение импульса. На оси пучка ( $r = 0$ ) из (9.6) для длительности импульса по уровню мощности 0.5 имеем

$$\frac{E^2(\tau, z)}{E^2(0, z)} \equiv \frac{E_0^2(\tau)}{E_0^2(0)} \frac{f^2(0, z)}{f^2(\tau, z)} = \frac{1}{2}. \quad (9.8)$$

Линеаризуя

$$P(\tau, z) = P(0, z) + \tau P'_\tau(\theta, z), \quad P'_\tau(\theta) \equiv \frac{P(\tau) - P(0)}{\tau},$$

$$f^2(\tau, z) = 1 - \frac{2z}{R_\Delta(\tau)} = 1 - \frac{2z}{R_\Delta(0)} + 2\tau z \frac{R'_\Delta(\theta)}{R_\Delta^2(0)},$$

в предфокальной области согласно (9.8) получим

$$\frac{E_0^2(\tau)}{E_0^2(0)} = \frac{P(\tau, z)}{P(0, z)} = 1 + \tau \frac{P'_\tau(\theta, z)}{P(0, z)} = \frac{1}{2} + \frac{\tau z}{1 - \frac{2z}{R_\Delta(0)}} \frac{R'_\Delta(\theta)}{R_\Delta^2(0)},$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\tau} = -2 \frac{P'_\tau(\theta, z)}{P(0, z)} + \frac{2z}{1 - \frac{2z}{R_\Delta(0)}} \frac{R'_\Delta(\theta)}{R_\Delta^2(0)}.$$

Учтем, что согласно определению  $R_\Delta$  в (9.7)

$$\frac{R'_\Delta(\theta)}{R_\Delta^3(0)} = -\frac{E'_0(\theta)}{R_{NL}^2(0)E_0(0)} = -\frac{P'_0(\theta)}{2R_{NL}^2(0)P_0(0)}. \quad (9.9)$$

Тогда

$$\frac{1}{\tau} \simeq -\left(2 + \frac{z}{1 - \frac{2z}{R_\Delta(0)}} \frac{R_\Delta(0)}{R_{NL}^2(0)}\right) \frac{P'_\tau(\theta, z)}{P(0, z)}.$$

Заметим, что длительность импульса при  $z = 0$

$$\frac{1}{\tau_0} = -2 \frac{P'_\tau(\theta, 0)}{P(0, 0)}.$$

Следовательно с учетом  $P(\xi, z) = P(\xi, 0)$ , в предфокальной области происходит укорочение импульса:

$$\frac{\tau_0}{\tau} = 1 + \frac{z}{1 - \frac{2z}{R_\Delta(0)}} \frac{R_\Delta(0)}{2R_{NL}^2(0)}, \quad (9.10)$$

причем вблизи фокуса лучи входят в фокус почти под прямым углом к оси ( $f'_z \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow R_\Delta/2$ ).

#### 9.4. Квазистационарная самофокусировка лазерных импульсов

Из (9.7) и условия  $f = 0$  получаем в неявном виде выражение для движущегося фокуса  $L_f(t)$  (см. также (8.31))

$$L_f(t) = z_\Phi \left( t - \frac{L_f(t)}{u} \right), \quad z_\Phi(\xi) = \frac{1}{2} \frac{R_D}{\sqrt{\frac{P(\xi)}{P_{кр}} - 1}}, \quad (9.11)$$

где обозначено  $P_{кр} = \frac{cn}{8\eta}$  (см. (8.30)). Решение уравнения (9.11) для гауссова импульса, приведенного на рис. 10а, имеет вид  $U$ -образной кривой (рис. 10б).

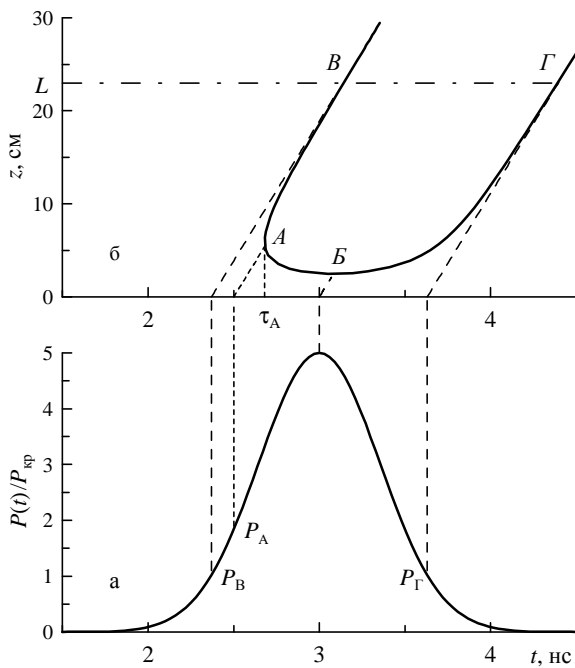


Рис. 10. Положение фокуса во времени (б) при квазистационарной самофокусировке для гауссова профиля входного импульса  $P(t)$  с шириной  $\tau_{1/e} = 1$  нс (а).  $P_{\max}/P_{\text{кр}} = 5$ ,  $R_D = 10$  см.

Как видно из рисунка,  $U$ -образная кривая имеет следующие особенности: сначала в момент времени  $\tau_A$  фокус появляется в точке  $A$  внутри среды. Затем он разбивается на два: один движется назад и, пройдя точку минимального фокусного расстояния  $B$ , соответствующую пику входного импульса, движется вперед; другой фокус движется вперед со скоростью, большей скорости света. Наклон обеих ветвей приближается к скорости света на дальних расстояниях. Если протяженность среды достаточно велика, то в момент достижения фокусами границы кристалла (точки  $B$  и  $\Gamma$ ) соответствующие мощности излучения  $P_B$  и  $P_\Gamma$  близки к  $P_{\text{кр}}$ . Необычные черты  $U$ -образной кривой движущихся фокусов приводят к ряду интересных следствий. Во-первых, фокус относительно большое время находится в точке  $B$ , поэтому пробой более вероятен именно в этой точке, соответствующей пику импульса. Во-вторых, когда размер кристалла намного больше фокусного расстояния  $B$ , световой импульс, дифрагирующий из нити на протяжении

нескольких сантиметров среды, имеет короткую длительность, менее 100 пс при наносекундном входном импульсе. В-третьих, высокая лазерная интенсивность (порядка  $10 \text{ ГВт/см}^2$ ) в фокальной плоскости легко инициирует другие нелинейные процессы, в частности, ВКР, ВРМБ (см. рис. 11), сильную фазовую самомодуляцию, приводящие как к спектральному уширению света, так и, в свою очередь, сильно влияющие на самофокусировку. Для времени установления нелинейности  $\tau_{\text{нел}} = 10^{-11} \div 10^{-12} \text{ с}$  модель движущихся фокусов применима вплоть до субнаносекундных импульсов.

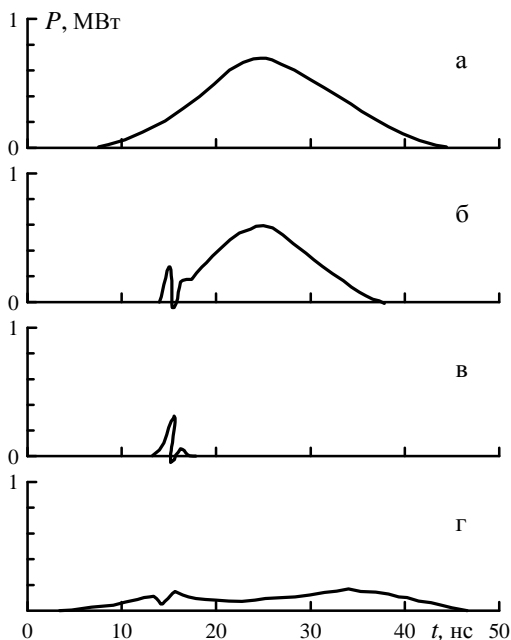


Рис. 11. Осциллограммы входного импульса (а), полного сигнала вынужденного рассеяния назад (б), импульса ВКР назад (в) и прошедшего импульса (г) [13].

Рассмотрим сигналы вынужденной генерации излучения при ВКР и ВРМБ, отображенные на рис. 11. Движущийся вдоль  $U$ -образной кривой фокус вызывает появление ВКР и ВРМБ в направлении как вперед, так и назад. Излучение в направлении назад, связанное с рассеянием на нижней ветви  $U$ -образной кривой, встречается с падающим излучением и эффективно при этом усиливается. Поскольку комбинационное рассеяние

имеет мгновенный отклик, то оно возникает первым, и его сильный рост вскоре истощает падающее лазерное излучение до уровня, лежащего ниже порога самофокусировки. Прекращение самофокусировки, в свою очередь, останавливает процесс ВКР. В результате сигнал ВКР имеет вид интенсивного субнаносекундного импульса, как это видно из рис. 11в. После постепенного исчезновения сигнала комбинационного рассеяния мощность падающего излучения восстанавливается и вновь достигает порога самофокусировки. Возникшее к этому моменту ВРМБ в направлении назад может иметь больший нестационарный коэффициент усиления, чем процесс ВКР. Оно нарастает по интенсивности, что вызывает истощение интенсивности падающего лазерного излучения. Вследствие саморегуляции процесс ВРМБ назад поддерживает интенсивность прошедшего излучения на уровне, лежащем немного ниже порога самофокусировки (рис. 11г). При этом сумма прошедшей интенсивности и интенсивности ВРМБ назад равна интенсивности падающего излучения. Истощение падающего излучения до уровня, лежащего ниже порога самофокусировки, одновременно кладет конец движению фокусов и формированию нитей. Вследствие этого часть нижней ветви  $U$ -образной кривой, отвечающая более поздним моментам времени, никогда не наблюдается.

Процесс ВКР вперед также может возникнуть в области движущегося фокуса. Его усиление происходит благодаря взаимодействию с дифрагированным после фокуса лазерным излучением, и поэтому оно должно быть гораздо меньше, чем в случае ВКР назад. При дальнейшем увеличении мощности лазера или протяженности среды увеличивается длина фокальной области, а также длина взаимодействия падающего лазерного излучения и компоненты ВКР. В результате этого сигнал ВКР вперед постепенно возрастает и может вызвать практически полное истощение мощности лазерного излучения в фокальной области. При этом в фокальной области вместо лазерного будет наблюдаться дифрагированное излучение ВКР, а нить, обусловленная движением фокуса по верхней ветви  $U$ -образной кривой, окажется прерванной.

Заметим, что из-за неустойчивости (см. выше в п. 8.2 анализ устойчивости плоского фронта) при заметном превышении мощности пучка  $P$  критического значения  $P_{кр}$  происходит формирование примерно  $P/P_{кр}$  фокусов и, соответственно, нитей.



## 9.5. Нестационарная самофокусировка

Когда длительность лазерного импульса становится короче или сравнимой со временем установления  $\tau$  возмущения коэффициента преломления  $\delta n$ , становится важным изменение  $\delta n$  во времени. Такой режим самофокусировки называется нестационарным. В случае, когда возмущение  $\delta n$  связано с переориентацией молекул в электрическом поле, этот процесс может быть описан уравнением Дебая

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \right) \delta n = \frac{1}{\tau} \delta n_0 (|E(\mathbf{r}, \xi)|^2), \quad (9.12)$$

где  $E$  рассматривается как функция переменных  $(\mathbf{r}, \xi = t - z/v)$ . Это уравнение имеет решение

$$\delta n(\mathbf{r}, \xi) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\xi} \delta n_0 (|E(\mathbf{r}, \xi)|^2) \exp\left(-\frac{\xi - \Psi}{\tau}\right) d\Psi. \quad (9.13)$$

Динамика нестационарной самофокусировки будет теперь определяться уравнением (8.12) с учетом (9.13). Качественно рассматриваемое явление можно объяснить на основе модели "горна". Рис. 12 показывает, как будут распространяться в среде различные части импульса. Вследствие нестационарного поведения  $\delta n$  передняя часть лазерного импульса может повлиять на самофокусировку задней его части. По мере того как пучок распространяется по ячейке, передний фронт импульса практически не фокусируется, так как нелинейный показатель преломления не может изменяться достаточно быстро. В частности, передний фронт импульса "а" дифрагирует по мере распространения практически так же, как в линейном случае. Следующая часть импульса "б" встречает на своем пути уже несколько большее индуцированное изменение  $\delta n$ , но все же недостаточно большое, чтобы вызвать самофокусировку, поэтому эта часть все еще дифрагирует, хотя и не так сильно. Часть "в"—"е" импульса встречает изменение  $\delta n$ , наведенное предшествующей частью импульса, достаточно большое для самофокусировки. Однако  $\delta n$  будет меньше при больших значениях  $z$ , поэтому, в конце концов, пучок начнет дифрагировать. Самофокусировка и дифракция части "в"—"е" протекает довольно плавно и происходит на сравнительно длинной дистанции. Диаметр в фокусе зависит от того, насколько велико изменение  $\delta n$ . Задняя часть импульса встречает большее изменение  $\delta n$  и самофокусируется на меньшем расстоянии с меньшим диаметром в фокусе, но ее дифракция все равно будет плавной из-за медленной дифракции передней части

импульса. Реально, минимальный диаметр пучка ограничивается каким-либо другим нелинейным процессом. Когда это происходит, диаметр фокуса оказывается постоянным для конечной части входного импульса, как это показано на рис. 12. Поскольку дифракция области самофокусировки задней части импульса определяется большим диаметром переднего фронта импульса, эта область может распространяться на расстояния, во много раз большие ее собственной дифракционной длины, без заметного изменения размеров. Представленная картина фактически является обобщением представления о движущемся фокусе и сводится к последней в квазистационарном случае. Итак, как это видно на рисунке 12, задняя часть импульса сжимается вследствие самофокусировки и пучок принимает форму горна, после чего он распространяется на большое расстояние без заметного изменения формы (так называемое динамическое каналирование).

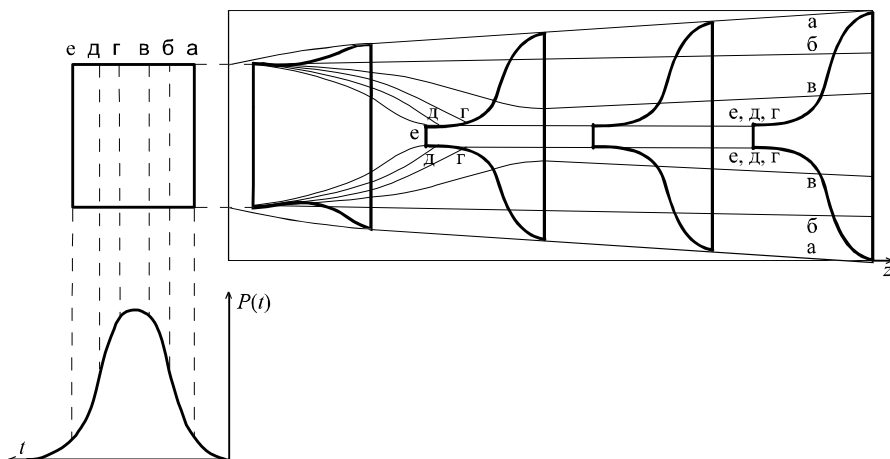


Рис. 12. Самофокусировка пикосекундного импульса в керровской жидкости. Различные части импульса (а, б, в и т.д.) фокусируются и дефокусируются, распространяясь по разным траекториям. Импульс деформируется, приобретая форму горна, после чего распространяется почти без изменения.

Для сильно нестационарных случаев можно ограничиться оценкой  $\delta n(\mathbf{r}, \xi) = n_2 |E_0|^2 t / \tau$  при  $t \leq t_{\text{имп}}$ . В частности, для теплового самовоздействия получим  $\delta n = \delta n_{\text{ст}} t / \tau_T$  при  $t \leq t_{\text{имп}}$ , где  $\tau_T = \rho c_T a^2 / \chi$  – время установления температуры ( $c_T$  – теплоемкость,  $\chi$  –

теплопроводность,  $a$  – радиус пучка,  $\rho$  – плотность среды). Тогда получим следующее соотношение, связывающее критические значения мощности в стационарном (см. (8.35)) и нестационарном случаях:

$$P_T = P_T^{\text{ст}} \frac{\tau_T}{t_{\text{имп}}} = \frac{\lambda_0^2 \chi}{\pi \delta a^2 \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial T}} \frac{\tau_T}{t_{\text{имп}}}.$$

В нестационарном случае более информативны оценки через энергию импульса. Времена релаксации нелинейности варьируются в пределах многих порядков. Причем существует общее правило: чем больше нелинейность, тем больше время релаксации.

Ниже приведены характерные значения критических значений мощности лазера  $P_{\text{кр}}^{\text{ст}}$  и энергии импульса  $W_{\text{кр}}$  и типичное время установления  $\tau_T$  в зависимости от механизма взаимодействия излучения со средой.

1) Тепловая самофокусировка:  $P_{\text{кр}}^{\text{ст}} \approx 0.01$  Вт,  $n_2 \approx 10^{-5}$  СГСЭ,  $\tau_T \approx 0.1 \div 10$  с,  $W_{\text{кр}} \approx 0.01$  Дж.

2) Керровская самофокусировка:  $P_{\text{кр}}^{\text{ст}} \approx 10$  кВт,  $n_2 \approx 10^{-11}$  СГСЭ,  $\tau_{\text{кер}} \approx 10^{-11}$  с,  $W_{\text{кр}} \approx 10^{-7}$  Дж.

3) Электрострикционная самофокусировка:  $P_{\text{кр}}^{\text{ст}} \approx 100$  кВт,  $n_2 \approx 10^{-12}$  СГСЭ,  $\tau_{\text{ст}} \approx 10^{-7}$  с,  $W_{\text{кр}} \approx 0.01$  Дж.

## 9.6. Фазовая самомодуляция

Интересным эффектом, наблюдаемым при квазистационарной самофокусировке, является появление сильного спектрального уширения излучения, выходящего из области нити самофокусировки. При наносекундном импульсе уширение может достигать нескольких десятков обратных см, при пикосекундном – нескольких тысяч обратных см.

$$\delta\varphi(t) = \frac{\omega}{c} l \delta n(t) = \frac{\omega}{c} n_2 |E(t)|^2 l,$$

$$\delta\omega(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \delta\varphi(t).$$

Для  $n_2 > 0$  зависимость параметров гауссова импульса в бегущей системе координат ( $t' = t - z/u$ ) приведена на рис. 13.

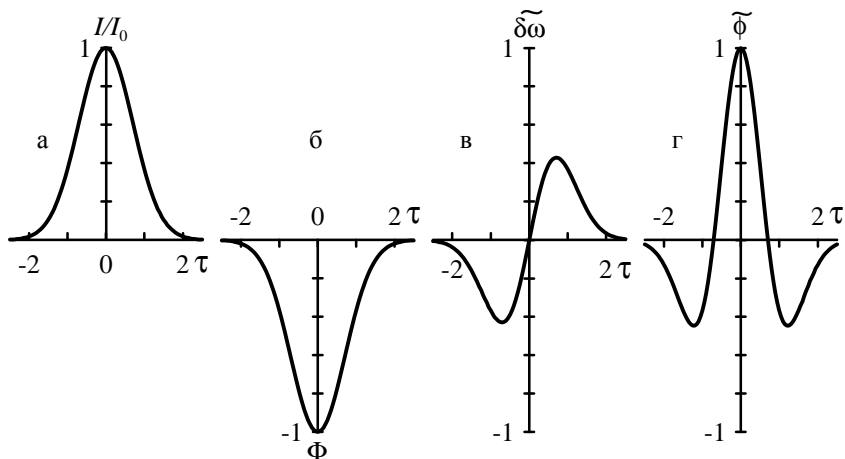


Рис. 13. Форма гауссового импульса с полушириной  $\tau_0$  (а), приведенные фаза  $\Phi = \varphi/\varphi_{\max}$  (б), девиация частоты  $\tilde{\delta\omega} = \delta\omega/\delta\omega_0$  (в) и скорость изменения частоты  $\tilde{\phi} = \phi/\phi(0)$  (г) в зависимости от  $\tau = (t - z/u)/\tau_0$ .  
 $\delta\omega_0 = 2\varphi_{\max}/\tau_0$ ,  $\phi(0) = 2\varphi_{\max}/\tau_0^2$ .

Уширение спектра для симметричного и асимметричного импульсов лазерного излучения, испытавших существенную фазовую самомодуляцию, показано на рис. 14. Полное число максимумов в спектре равно целой части от  $\delta\varphi_{\max}/\pi$ .

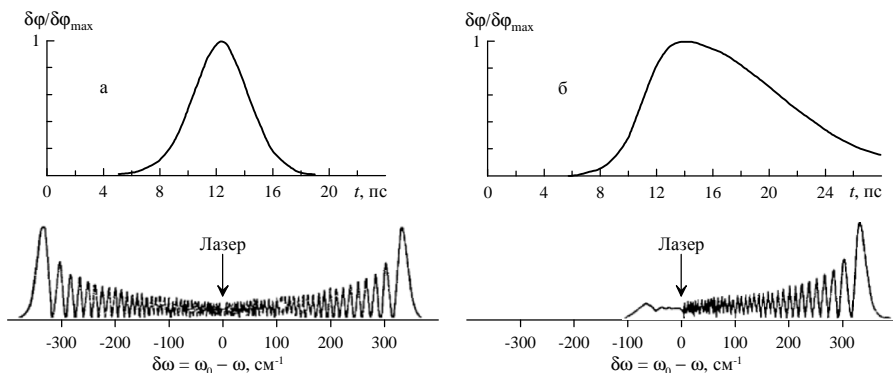


Рис. 14. Рассчитанный спектр гауссовского (а) и "скошенного" (б) импульсов, испытавших фазовую самомодуляцию, с числом максимумов  $\delta\varphi_{\max}/\pi \gg 1$  [2].

Оценка полной среднеквадратичной ширины спектра приводит к выражению

$$\overline{\delta\omega} = \sqrt{1 + (0.88 \cdot \delta\varphi_{\max})^2} \overline{\delta\omega_0}.$$

Пространственная самомодуляция на поперечном профиле пучка проявляется в виде искажения волнового фронта и приводит, как было показано выше, к самофокусировке, если среда имеет достаточную протяженность. В тонком слое среды также может возникнуть сильная пространственная фазовая самомодуляция, однако сжатие в среде пучка вследствие самофокусировки почти не заметно. Этот случай совершенно аналогичен фазовой самомодуляции во времени. Для пучка с гауссовским профилем изменение фазы  $\delta\varphi(r)$  в поперечном направлении имеет колоколообразную форму с центром при  $r = 0$ . При условии  $|\delta\varphi(r)|_{\max} \gg 2\pi$  пучок при проецировании на экран дает систему интерференционных колец (рис. 15).



Рис. 15. Картина дифракции луча непрерывного аргонового лазера, прошедшего через пленку нематического жидкого кристалла толщиной 0.3 мм [16].

*Задача 9.1.* Линейно поляризованный импульс квазимонохроматического излучения проходит через электрооптическую ячейку Поккельса длиной  $L = 10$  см. Показатель преломления ячейки увеличивают по закону  $n(t) = n_0 + \alpha t$ . Как изменится длительность импульса и его средняя частота после прохождения через ячейку, если  $\alpha = 3 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ ?

## 10. Самовоздействие: вырожденное четырехволновое смешение

### 10.1. Обращение волнового фронта

Пусть поле  $\mathbf{E}$  является плоской монохроматической волной

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t + i\varphi(\mathbf{r})). \quad (10.1)$$

Тогда обращенной к ней будет волна вида

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) \exp(i\omega t + i\varphi(\mathbf{r})). \quad (10.2)$$

Т. е. для монохроматической волны, как показывает анализ действительных значений (10.1) и (10.2), обращение времени эквивалентно изменению знака фазы,  $\varphi(\mathbf{r}) = -\varphi(\mathbf{r})$  во всех точках пространства. Например, бегущей плоской волне  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t + i\varphi_0)$  соответствует обращенная волна  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t + i\varphi_0)$ , распространяющаяся навстречу исходной.

Для полей более сложной пространственной структуры процедуру обращения удобно иллюстрировать с помощью понятия волнового фронта. Волновым фронтом называется поверхность, определяемая условием  $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$ . Нормали к этой поверхности совпадают с лучами, характеризующими локальное направление волн. Прямая и обращенная волны имеют в точности совпадающие волновые фронты и распространяются точно навстречу друг другу, т. е. операция получения обращенной волны эквивалентна обращению волнового фронта (ОВФ).

Для того чтобы получить обращенную волну для плоской волны, достаточно поставить плоское зеркало перпендикулярно направлению распространения. Для сферической – сферическое с центром кривизны в источнике. Для любой другой – создать зеркало, совпадающее с волновым фронтом.

#### *Получения обращенной волны*

Предположим, что на нелинейную среду падают две когерентные волны — плоская

$$\mathbf{E}_1 = \mathcal{E}_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{z})$$

и неплоская

$$\mathbf{E}_2 = \int \mathcal{E}_2(k') \cos(\omega t - \mathbf{k}'\mathbf{z}) dk',$$

представляющая собой совокупность пространственных гармоник со спектральными амплитудами  $\mathcal{E}_2(k')$ . Нас интересует показатель преломления на частоте  $\omega$ , которая определяется не мгновенной интенсивностью суммарного поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ , а интенсивностью  $\langle E^2 \rangle_\tau$ , усредненной по интервалу времени порядка времени релаксации  $\tau$ . После операции усреднения получим

$$n \sim \mathcal{E}_1 \int \mathcal{E}_2(k') \cos((\mathbf{k}' - \mathbf{k})\mathbf{z}) dk'.$$

Иными словами, показатель преломления среды оказался пространственно промодулированным в соответствии с картиной интерференции полей  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ .

Если на так приготовленную среду с пространственно неоднородным показателем преломления направить слабую плоскую волну той же частоты  $\omega$  с волновым вектором, противоположным волновому вектору первой волны,

$$\mathbf{E}_3 = \mathcal{E}_3 \cos(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{z}),$$

то бегущая волна поляризации  $\mathcal{A}(z, t)$ , возникающая под действием бегущей волны поля  $\mathbf{E}_3(z, t)$ , имеет не одну гармонику, как в случае однородной среды, а представляет собой совокупность многих гармоник,

$$n(z)\mathbf{E}_3(z, t) = \mathcal{A}(z, t) = \int \mathcal{A}(k'') \cos(\omega t - \mathbf{k}''\mathbf{z}) dk'',$$

где

$$\mathcal{A}(k'') = \int \mathcal{A}(z) \cos(\omega t - \mathbf{k}''\mathbf{z}) dz.$$

Заметим теперь, что амплитуда гармоники поляризации  $\mathcal{A}(k)$  связана с гармоникой поля  $\mathbf{E}_2(k)$  следующим соотношением

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(k'') &\sim \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_3 \int \mathcal{E}_2(k') \cos[(k'' - k')z] \cos[(k' - k)z] dk' dz = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_3 \int \mathcal{E}_2(k') \{ \cos[(k'' - k)z] + \cos[(k'' + k' - 2k)z] \} dk' dz. \end{aligned}$$

Интегрирование по  $z$  дает  $\delta$ -функции, которое в свою очередь после интегрирования по  $k'$  дает

$$\mathcal{A}(k'') \sim \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_2(-k'').$$

Видно, что каждой гармонике поля  $\mathbf{E}_2$  соответствует синфазная ей гармоника поляризации, распространяющаяся в точно противоположную сторону. Таким образом, плоская волна  $\mathbf{E}_3$  вызывает появление в

пространстве волны  $E_4$ , конфигурация поля которой точно соответствует волне  $E_2$  со строго противоположным направлением распространения – ОВФ при четырехволновом смещении.

### Статическая голография

Пусть на тонкую фотопластинку падает волна сигнала  $E_3(r)$  и когерентная с ней опорная волна  $E_1(r)$  (рис. 16а). Действие проявленной фотопластинки на восстанавливающую волну можно описать введением комплексного коэффициента пропускания  $t(r)$  для амплитуды поля:  $E_{\text{прош}}(r) = t(r) \cdot E_{\text{пад}}(r)$ . В простейшем приближении величина  $t(r)$  связана с распределением интенсивности записывающего поля, так что

$$\delta t(r) = \text{const}[E_1^*(r)E_3(r) + E_1(r)E_3^*(r)]. \quad (10.3)$$

Для восстановления голограммы направим считывающую волну  $E_2(r) \sim E_1^*(r)$  точно навстречу опорной волне при записи (операция  $E_2(r)t(r)$ ) (рис. 16б). Второе слагаемое в (10.3) восстанавливает поле

$$E_4(r) \sim |E_1|^2 E_3^*(r), \quad (10.4)$$

распространяющееся навстречу  $E_3(r)$  и при  $|E_1|^2 = \text{const}$  точно отвечающее обращенной к сигналу волне.

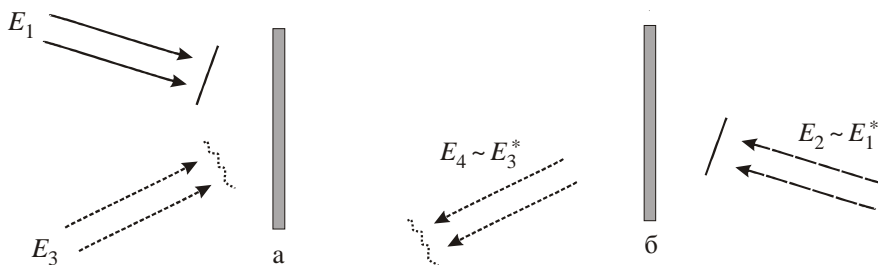


Рис. 16. Статическая голограмма на фотопластинке. а) получение голограммы; б) восстановление голограммы.

Рассмотренная схема относится к статической голографии, когда для каждой новой волны  $E_3(r)$  записывается новая голограмма. Динамической голографией называют голографию в специальных средах, не требующих дополнительной обработки, т. е. таких, в которых возмущения оптических свойств (диэлектрической проницаемости  $\epsilon(r)$ ) возникают непосредственно в присутствии интерферирующих полей и исчезают при их снятии.



## 10.2. Вырожденное четырехволновое смещение

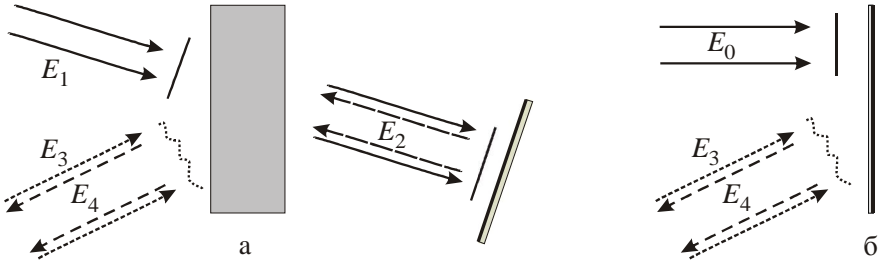


Рис. 17. Четырехволновое смещение (объемная динамическая голография).

На кристалл направляют три волны: опорную  $E_1$ , сигнал  $E_3$ , вторую опорную  $E_2$ . В такой среде процессы записи и считывания голографической решетки совмещены во времени (см. рис. 17а). Эффективность ОВФ возрастает в толстослойных средах за счет того, что вторая опорная волна тоже интерферирует с сигнальной и ее считывание первой опорной также формирует обращенную сигнальную волну (ЧВС).

Если подать плоскую волну под прямым углом и сигнальную волну под любым углом на отражающую поверхность, коэффициент отражения которой зависит от интенсивности падающего на нее света (частный случай ЧВС), то сразу получится обращенная волна (ОВФ-П) (рис. 17б).

Для геометрии, в которой волны накачки и сигнала не параллельны, амплитуду компоненты поляризации, пропорциональную  $\exp(-ikz)$ , которая описывает распространение обратной волны  $E_4$ , можно в общем виде записать как

$$\mathbf{P}(\omega) = C'(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_p^*)\mathbf{E}_2 + C''(\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_p^*)\mathbf{E}_1 + D(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)\mathbf{E}_p^* + C\mathbf{E}_4 \sum_{i=1}^4 |\mathbf{E}_i|^2 + \dots, \quad (10.5)$$

где  $\mathbf{E}_p \equiv \mathbf{E}_3$ . Первые три слагаемых (10.5) описывают генерацию обратной волны. Аналогично могут быть выписаны компоненты поляризации, пропорциональные  $\exp(ikz)$ ,  $\exp(ikz')$  и  $\exp(-ikz')$ , которые описывают распространение сигнальной волны и двух волн накачки.

Два первых слагаемых в (10.5) представляют интерференцию сигнальной волны с прямой и обратной волнами накачки, соответственно. Такая интерференция приводит к пространственной периодической модуляции поляризации среды, которая сводится к появлению объемной

дифракционной решетки

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_p^* \sim \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) \exp(-i\mathbf{k}_p\mathbf{r} + i\omega t) = \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_p)\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_p^* \sim \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) \exp(-i\mathbf{k}_p\mathbf{r} + i\omega t) = \exp(-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}_p)\mathbf{r})$$

с периодами, соответственно (из условий  $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_p)\mathbf{r} = 2\pi$  и  $(\mathbf{k} + \mathbf{k}_p)\mathbf{r} = 2\pi$ )

$$\Lambda_a = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \text{ и } \Lambda_b = \frac{\lambda}{2 \cos \frac{\theta}{2}},$$

где  $\theta$  – угол между  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_p$ . Для геометрии с углом  $\theta = 90^\circ$  периоды обеих решеток одинаковы. С геометрической точки зрения генерация обратной волны есть результат рассеяния на каждой из объемных решеток той волны накачки, которая не принимает участия в формировании соответствующей решетки.

Третье слагаемое в (10.5) описывает стоячую волну модуляции поляризации, которая колеблется с частотой  $2\omega$ . На этой стоящей волне модуляции  $\mathbf{E}_p$  и  $\mathbf{E}_4^*$  рассеиваются друг в друга во взаимодействии, автоматически согласованном по фазе.

Полная обратная волна дается когерентной суммой первых трех компонент в (10.5). Относительное значение этих компонент зависит от природы нелинейного взаимодействия, выбора поляризации волн накачки и сигнальной волны и расположения поляризаций волн относительно плоскости, содержащей волновые векторы накачки и сигнала.

В прозрачных средах с нерезонансной восприимчивостью важен вклад всех трех компонент.

В поглощающих средах, в которых нелинейное взаимодействие возникает в результате насыщения поглощения или градиентов температуры, основной вклад дают первые два слагаемых, зависящие от поляризации и эффектов размытия решеток.

В среде с двухфотонным резонансом основной вклад дает третье слагаемое.

Понятно, что вклад третьего слагаемого отсутствует, если волны накачки поляризованы ортогонально. При этом, если поляризация сигнальной волны параллельна волне одной из накачек, лишь один из первых двух слагаемых не равен нулю. Если же волны накачки поляризованы параллельно, но сигнальная волна поляризована ортогонально к ним, то вклад дает только третье слагаемое. Если все три волны поляризованы параллельно, то нет никаких ограничений из-за поляризации. Однако в зависимости от расположения поляризаций волн

относительно плоскости, содержащей волновые векторы накачки и сигнала, вклад компонент тензора восприимчивости  $\epsilon^{(3)}$  будет различен.

### *Анализ генерации обратной волны*

Рассмотрим геометрию, изображенную на рис. 17а, когда угол  $\theta \neq 0$ . Будем считать, что среда прозрачна и что все волны поляризованы в одном направлении. Примем также, что плоскость, содержащая направления распространения прямой волны накачки и сигнальной волны, перпендикулярна векторам поляризации. Если пренебречь нелинейными фазовыми сдвигами, то амплитуды полей описываются уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}_4}{dz} &= -i \frac{6\pi^2}{n\lambda} \chi \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_p^*, \\ \frac{d\mathcal{E}_p}{dz} &= i \frac{6\pi^2}{n\lambda} \chi \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_4^*, \\ \frac{d\mathcal{E}_1}{dz} &= i \frac{6\pi^2}{n\lambda} \chi \mathcal{E}_4 \mathcal{E}_p \mathcal{E}_2^*, \\ \frac{d\mathcal{E}_2}{dz} &= -i \frac{6\pi^2}{n\lambda} \chi \mathcal{E}_4 \mathcal{E}_p \mathcal{E}_1^*,\end{aligned}\tag{10.6}$$

где (см. (10.5))

$$\chi = \chi_{1111}(-\omega, \omega, \omega, -\omega) = \frac{C}{3} + \frac{D}{6}.$$

В рассматриваемой геометрии (см. рис. 17а) все волны имеют одинаковую частоту и условие фазового синхронизма  $\Delta k = k_4 - (k_1 + k_2 - k_p) = 0$  удовлетворяется автоматически независимо от угла  $\theta$ , т. к.  $k_4 = -k_p$  и две волны накачки направлены противоположно ( $k_1 = -k_2$ ). Если можно считать амплитуды полей накачки постоянными, то решение системы уравнений (10.6) имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p(z) &= \mathcal{E}_p(0) \frac{\cos[s|\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2|(z-L)]}{\cos[s|\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2|L]} + i\mathcal{E}_4^*(L) \frac{\sin(s|\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2|z)}{\sin(s|\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2|L)}, \\ \mathcal{E}_4(z) &= \mathcal{E}_4(L) \frac{\cos[s|\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2|z]}{\cos[s|\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2|L]} - i\mathcal{E}_p^*(0) \frac{\sin(s|\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2|(z-L))}{\cos[s|\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2|L]},\end{aligned}\tag{10.7}$$

где  $s = 6\pi^2 \chi / n\lambda$ , а  $L$  – длина взаимодействия пучков накачки и сигнала вдоль оси  $z$ . Отметим следующие особенности этого решения: а) обратная волна  $\mathcal{E}_4$  может генерироваться, даже если  $\mathcal{E}_4(L) = 0$ , б) в отсутствии входного сигнала для  $\mathcal{E}_4$  амплитуда обратной волны комплексно сопряжена амплитуде сигнальной волны, в) при выполнении условия  $s|\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2|L = \pi/2$  система может генерировать, испуская волны  $\mathcal{E}_p$  и  $\mathcal{E}_4$  даже

без входных сигналов в каждой волне.

### *Усиление при ВЧВС*

В рассматриваемой геометрии ВЧВС может действовать как усилитель прямой или обратной волны, если на входе имеется только одна из этих волн. Например, если  $\mathcal{E}_4(L) = 0$ , то амплитуды сигнальной и обратной волн даются выражениями

$$\mathcal{E}_p(z) = \mathcal{E}_p(0) \frac{\cos[s|\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2|(z-L)]}{\cos[s|\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2|L]}, \quad (10.8)$$

$$\mathcal{E}_4(z) = -i\mathcal{E}_p^*(0) \frac{\sin[s|\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2|(z-L)]}{\cos[s|\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2|L]},$$

амплитудный коэффициент усиления

$$G = \frac{\mathcal{E}_p(L)}{\mathcal{E}_p(0)} = \frac{1}{\cos[s|\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2|L]}, \quad (10.9)$$

в то время как генерируемая обратная волна имеет амплитуду

$$\mathcal{E}_4(0) = i\mathcal{E}_p^*(0)\text{tg}(s|\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2|L) \quad (10.10)$$

на входе в нелинейную среду. В рамках рассмотренного приближения можно показать, что это соотношение выполняется и для амплитуды сигнального пучка, являющейся произвольной функцией поперечной координаты  $r$ , т. е.

$$\mathcal{E}_4(r, 0) = i\mathcal{E}_p^*(r, 0)\text{tg}(s|\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2|L).$$

**Комплексно-сопряженное отражение.** Как видно из формулы (10.10), амплитуда обратной волны пропорциональна комплексно-сопряженной амплитуде входного сигнального пучка. Таким образом, в условиях, когда  $\mathcal{E}_4(L) = 0$  или  $\mathcal{E}_p(0) = 0$ , коэффициент отражения этого зеркала составляет

$$R \equiv \frac{I_4(0)}{I_p(0)} = \text{tg}^2(s|\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2|L) \quad (10.11)$$

и может существенно превышать единицу.

**Генерация при ВЧВС.** Формула (10.10) показывает, что при выполнении условия

$$s|\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2|L = \frac{\pi}{2} \quad (10.12)$$

амплитуда отраженной волны стремится к бесконечности, что означает генерацию (наличие конечной амплитуды  $\mathcal{E}_4$  в отсутствии сигнала  $\mathcal{E}_p$ ).

Аналогичный вывод справедлив и для  $\mathcal{E}_p$  при тех же условиях (см. (10.8)) пороговое условие (10.12) обычно раньше всего выполняется для волн, коллинеарных волнам накачки, для которых длина взаимодействия наибольшая. Для выделения направления генерируемой волны можно использовать внешнее зеркало, которое снижает порог генерации до значения

$$s|\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2|L = \text{arctg}\left(\frac{1}{|r|}\right), \quad (10.13)$$

где  $|r|^2$  – коэффициент отражения зеркала.

### 10.3. ОВФ, основанное на эффекте вынужденного рассеяния (ОВФ-ВР)

**Комбинационное рассеяние и электрострикция + ВРМБ.** Для реализации такого механизма ОВФ направляют мощный неоднородный лазерный пучок  $E_L$  в ВРМБ-активную среду. Необходимую степень неоднородности пучка, как по продольной, так и по поперечной составляющим, получают предварительным пропусканием через искажающий элемент (см. рис. 18).

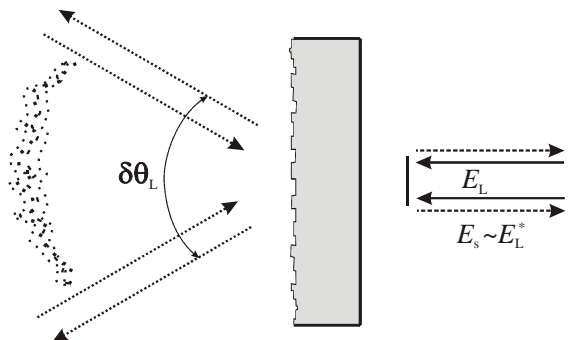


Рис. 18. ОВФ, основанное на эффекте вынужденного рассеяния (ОВФ-ВР).

В активной среде в направлении навстречу волне накачки из спонтанных шумов развивается стоксова волна  $E_s$ , усиливаясь за счет процесса ВРМБ по мере распространению к входному окну. В результате происходит очень большое усиление стоксовой волны при сильной пространственной неоднородности локального усиления, обусловленной неоднородностями накачки. За счет дискриминация усиления необращающих конфигураций рассеянной назад волны в поле

неоднородной накачки реализуется механизм ОВФ-ВР.

*Сравнение методов:*

- ОВФ-ВР – самообращение, но сильно пороговый процесс.
- Статическая голография, ЧВС и ОВФ-П: большая мощность только для опорной волны, и возможность обращения с коэффициентом отражения выше единицы, т. е. с усилением. Недостаток: жесткие требования к оптическому качеству нелинейной среды и к пространственной структуре опорных волн.

*Преимущества динамической голографии:*

- не надо устанавливать проявленную голограмму точно на прежнее место;
- голограмма обращает сигнальную волну, подстраиваясь автоматически под нее;
- обращенная волна возбуждается практически мгновенно.

## 10.4. Применение ОВФ

Применения ОВФ основаны на свойстве автоматически восстанавливать свою структуру при обратном проходе по той же оптически неоднородной среде. Обращенный пучок будет иметь "хороший" волновой фронт там же, где его имел исходный пучок. ОВФ используется в ряде практических приложений в областях восстановления изображений, исправления оптических искажений и в различных видах обработки сигнала. В ряде случаев реализован за счет использования различных видов вынужденного рассеяния – ВМБР, ВКР, рэлеевского рассеяния. Далее кратко проиллюстрируем некоторые применения ОВФ.

**Двухпроходный усилитель (рис. 19а).** Для создания мощных высоконаправленных пучков. На входе маломощный, но высоконаправленный пучок. Основу составляет резонаторы с ОВФ-зеркалом.

В режиме собственной генерации необходимо ставить диафрагму в резонаторе для отсекаания высших поперечных мод. Достигается отсутствие продольной модовой структуры, существенно улучшается качество распределения интенсивности в дальней зоне.

**Автофокусировка излучения (рис. 19б).** В задачах лазерного термоядерного синтеза нужно создать мощный световой импульс с малой расходимостью и затем точно сфокусировать его на мишень. Когда на мишень светят вспомогательным лазером, часть света попадает в апертуру силового лазера, находящего в припороговом режиме

генерации, и усиливается на первом и втором проходах. При этом дальнейшее ОВФ зеркало позволяет решить сразу две проблемы: убрать все искажения, которые испытал пучок света при первом прохождении через активный элемент лазера, и затем точно сфокусировать его на мишень. Эта схема носит название "ОВФ самонаведения".

**Применение в фотолитографии (рис. 19в).** При использовании ОВФ зеркала снимаются требования к системе фокусировки силового лазера и нет больших потерь в полупрозрачном транспаранте.

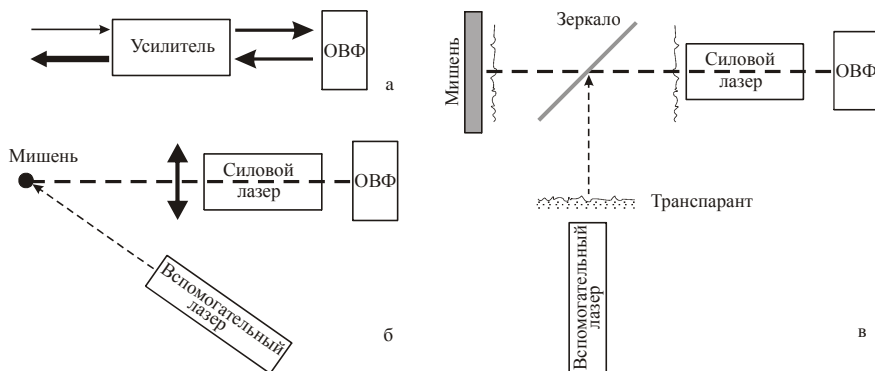


Рис. 19. Применение ОВФ: двухпроходный усилитель (а), ОВФ самонаведения (б), фотолитография (в).

### Некоторые экспериментальные данные:

- 1) Генерация при ВЧВС: порог  $8.8 \text{ МВт/см}^2$ .
- 2) Голографическое восстановление изображений: увеличение или уменьшение изображения за счет различия в длинах волн пучков накачки и считывания с разрешением до 500 линий/мм.

## 11. Нестационарные эффекты

### 11.1. Стационарные импульсы – солитонный режим распространения

Одним из интереснейших явлений в физике нелинейных волн является формирование устойчивых волновых пакетов, распространяющихся на значительные расстояния без изменения формы. В нелинейно-оптических процессах можно выделить, по крайней мере, три типа солитонов. Прежде всего, это "шредингеровские солитоны", где возникновение устойчивых импульсов связано с балансом действия дисперсии и нелинейности в прозрачной среде. Генерация солитонов возможна и в условиях, когда под влиянием световых импульсов возникает изменение разности населенностей среды – "резонансные солитоны". Наконец, оптические солитоны могут возникнуть в среде с квадратичной нелинейностью при взаимодействии волн с сильно различающимися частотами. Образование солитонов здесь связано с балансом эффектов группового запаздывания волн и нелинейного взаимодействия.

**Формирование шредингеровского солитона.** Ранее в приближении медленно меняющихся амплитуд было получено уравнение (8.11) для комплексной амплитуды слабоизменяющихся пучков в слабонеоднородных средах

$$ik_0 \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}_0 = -\frac{1}{2} \tilde{N}_\perp^2 \mathcal{E}_0 - \eta(\omega) |\mathcal{E}_0|^2 \mathcal{E}_0,$$

где  $u = (\partial k_0 / \partial \omega)^{-1}$  – групповая скорость. Если при выводе этого уравнения в разложении учесть еще и дисперсионные поправки второго порядка  $\partial^2 k_0 / \partial \omega^2$ , то получим (первым слагаемым в правой части пренебрегаем)

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}_0 = i \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{E}_0 + i \beta |\mathcal{E}_0|^2 \mathcal{E}_0, \quad (11.1)$$

где первое слагаемое в правой части связано с дисперсией групповой скорости  $k_2 = -\partial^2 k_0 / \partial \omega^2 = -\partial u^{-1} / \partial \omega$ , а второе – с индуцированным полем изменением  $\Delta n = \frac{\beta c}{\omega} |\mathcal{E}_0|^2$ ,  $\beta = \eta / k_0$ , а  $\eta$  – для прозрачной изотропной среды задано формулой (8.3). Вводя бегущие координаты  $\xi = t - z/u$ , получим НУШ



$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_0 - i \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{E}_0 - i \beta |\mathcal{E}_0|^2 \mathcal{E}_0 = 0. \quad (11.2)$$

Решение ищем в виде  $\mathcal{E}_0 = \rho(\xi) \exp(i\Gamma z)$ . Для амплитуды  $\rho$  получим

$$\frac{k_2}{2} \ddot{\rho} - \Gamma \rho + \beta \rho^3 = 0,$$

и, домножив на  $\dot{\rho}$  и интегрируя по  $\xi$ , имеем

$$k_2 \dot{\rho}^2 - 2\Gamma \rho^2 + \beta \rho^4 = 0.$$

Подставляя

$$\rho = \rho_0 \operatorname{sech}\left(\frac{\xi}{\tau}\right) \equiv \frac{\rho_0}{\operatorname{ch}\left(\frac{\xi}{\tau}\right)} \quad (11.3)$$

получим

$$\frac{k_2}{\tau^2} \operatorname{sh}^2\left(\frac{\xi}{\tau}\right) + \beta \rho_0^2 = 2\Gamma \operatorname{ch}^2\left(\frac{\xi}{\tau}\right).$$

Следовательно, в рассматриваемом случае  $k_2, \beta > 0$  (11.2) имеет солитонное решение (11.3) с длительностью  $\tau$  и амплитудой  $\rho_0$ , удовлетворяющими соотношению

$$2\Gamma = \frac{k_2}{\tau^2} = \beta \rho_0^2. \quad (11.4)$$

Физика комбинированного влияния дисперсии групповой скорости  $\partial u / \partial \omega > 0$  (т. к.  $k_2 = -\partial u^{-1} / \partial \omega > 0$ ) и индуцированного полем  $\Delta n > 0$  (т. к.  $\beta > 0$ ) выглядит следующим образом. При  $\Delta n > 0$  текущая частота увеличивается от фронта импульса к его "хвосту". За счет дисперсии групповой скорости  $\partial u / \partial \omega > 0$  передняя часть импульса будет распространяться медленнее, чем задняя. В результате импульс сжимается (эффект, обратный дисперсионному расплыванию в линейной среде). При выполнении условия (11.4) эффекты сжатия и расплывания компенсируют друг друга и происходит квазистационарное распространение импульса. Для фундаментального солитона площадь под солитоном равна

$$S_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 \operatorname{sech}\left(\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi = 2\rho_0 \tau \arctg\left[\exp\left(\frac{\xi}{\tau}\right)\right] \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\pi \rho_0 \tau = 2\pi \sqrt{\frac{k_2}{\beta}}. \quad (11.5)$$

Если  $S$  в несколько раз превышает  $S_0$ , то происходит распад импульса на несколько пичков, с последующим восстановлением первоначального

импульса на периоде солитона

$$z_0 = \frac{2\pi}{\Gamma} = \frac{4\pi\tau^2}{|\partial u^{-1}/\partial\omega|}. \quad (11.6)$$

В кварцевом волокне при  $\lambda = 1.55$  мкм и  $\tau = 4$  пс необходимая длина волокна  $z_0 = 1260$  м,  $I = 1$  МВт/см<sup>2</sup> – т. е. 1 Вт при сечении пучка в волокне  $10^{-6}$  см<sup>2</sup>.

## 11.2. Наведенный псевдодиполь в двухуровневой системе

Динамический отклик двухуровневой системы на приложенное поле описывается уравнением Лиувилля для матрицы плотности  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$  ( $\rho_{22}$  и  $\rho_{11}$  – вероятности нахождения частицы соответственно на верхнем и нижнем уровнях ( $\rho_{22} + \rho_{11} = 1$ ),  $\rho_{21} = \rho_{12}^*$  показывают степень когерентности верхнего и нижнего состояний, равные 0 при случайных (некогерентных фазах))

$$i\hbar \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = [\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_E, \mathbf{r}] + i\hbar \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)_{\text{релак}}, \quad (11.7)$$

где  $[\mathbf{H}, \mathbf{r}] = \mathbf{H}\mathbf{r} - \mathbf{r}\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}_0$  – невозмущенный гамильтониан двухуровневой системы,  $\mathbf{H}_E = -\mathbf{E}\hat{\mathbf{m}}$  – гамильтониан взаимодействия для этой системы в дипольном приближении,  $\hat{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix}$ . Если определить псевдодиполь (среднее по ансамблю значение электрического "диполя") по формуле

$$\langle \mathbf{m} \rangle \equiv \langle \mu_x \rangle \mathbf{i} + \langle \mu_y \rangle \mathbf{j} + \langle \mu_z \rangle \mathbf{l}, \quad (11.8)$$

где

$$\langle \mu_x \rangle \equiv \frac{\gamma}{\sqrt{2}} (\rho_{12} + \rho_{21}),$$

$$\langle \mu_y \rangle \equiv \frac{\gamma}{i\sqrt{2}} (\rho_{12} - \rho_{21}),$$

$$\langle \mu_z \rangle \equiv \gamma (\rho_{22} - \rho_{11}), \quad \gamma \equiv \mu_{21},$$

то из (11.7) следует

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{m} \rangle = -\mathbf{W} \times \langle \mathbf{m} \rangle - \frac{1}{T_2} (\langle \mu_x \rangle \mathbf{i} + \langle \mu_y \rangle \mathbf{j}) - \frac{1}{T_1} (\langle \mu_z \rangle - \langle \mu_z^0 \rangle) \mathbf{l}, \quad (11.9)$$

где  $\mathbf{W} = \omega_0 \mathbf{l}$  – угловая частота прецессии,  $T_1$  и  $T_2$  – соответственно продольное и поперечное время релаксации. Параметр  $T_1$  определяется временем жизни возбужденных молекул из-за всех процессов спонтанного распада этого уровня, а параметр  $T_2$  – интенсивностью процесса сбоя фаз возбужденного состояния молекул как за счет

процессов спонтанного распада, так и за счет неоднородного уширения. Решение уравнения (11.9) в пренебрежении релаксионными процессами (т. е. при  $T_1, T_2 \rightarrow \infty$ ) проиллюстрировано на рис. 20.

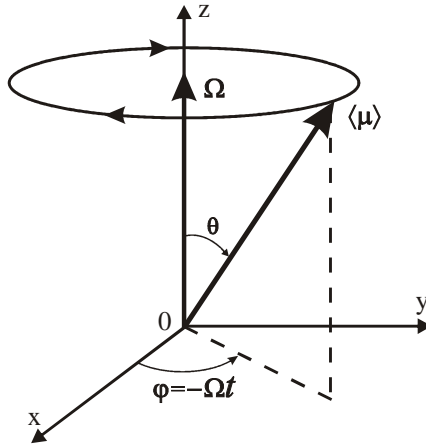


Рис. 20. Прецессия ротатора вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $-\Omega$ .  $\theta = \text{const}$ ,  $\phi = -\Omega t$  – фаза ротатора.

Рассмотрим практически важный случай почти резонансного возбуждения двухуровневой системы циркулярно поляризованным электрическим полем

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{i} + i\mathbf{j}}{\sqrt{2}} \mathcal{E}(t) \exp(ikz - i\omega t) + \text{к.с.} \right),$$

где  $\omega \approx \omega_0$ . Поскольку поле  $\mathbf{E}$  вращается почти синхронно с прецессией диполя вокруг оси  $z$ , запишем уравнение (11.9) (релаксионными процессами пренебрегаем) в системе координат, вращающейся с частотой  $\omega$  вокруг оси  $z$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{m}^* \rangle = -\mathbf{W}^* \times \langle \mathbf{m}^* \rangle, \quad (11.10)$$

где  $\mathbf{W}^* = (\omega_0 - \omega)\mathbf{I} - \frac{\gamma}{\hbar} \mathcal{E} \mathbf{j}'$ , орт  $\mathbf{j}'$  направлен вдоль  $\mathbf{E}$ .

Таким образом, динамический отклик диполя, согласно (11.10), можно описать его прецессией вокруг  $\mathbf{E}_{\text{эфф}}^* = -\frac{\hbar}{\gamma}(\omega_0 - \omega)\mathbf{I} + \mathcal{E} \mathbf{j}'$  во вращающейся системе координат. Чтобы найти, как среда, в свою очередь влияет на поле, мы должны решить волновое уравнение, в котором поляризация определяется изменяющимся во времени дипольным

моментом, в случае кубической или изотропной среды имеющим вид

$$\left(\tilde{N}^2 - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (N \langle \mathbf{p} \rangle). \quad (11.11)$$

Это уравнение получено в предположении, что среда является кубической или изотропной и содержит в единице объема  $N$  диполей с  $\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \mu_x \rangle \mathbf{i} + \langle \mu_y \rangle \mathbf{j}$ . Совместное решение (11.10) и (11.11) позволяет предсказать целый ряд интересных нестационарных явлений для различных условий резонансного возбуждения: *затухание свободной поляризации, оптическая нутация,  $\pi$ -импульс, самоиндуцированная прозрачность, фотонное эхо, сверхизлучение.*

### 11.3. Нестационарная нутация и затухание свободной поляризации

Колебания разности населенностей двухуровневой системы под действием резонансного поля называют нутацией. Пусть вначале двухуровневая система находится в основном состоянии и, поскольку

$$\langle \mu_z \rangle \equiv \gamma(\rho_{22} - \rho_{11}), \quad (11.12)$$

псевдодиполь  $\langle \mathbf{m} \rangle = \langle \mu_z^0 \rangle \mathbf{l}$  направлен вдоль  $-\mathbf{l}$ . В момент  $t = 0$  включается близкое к резонансу циркулярно поляризованное поле. При этом  $\langle \mathbf{m}^* \rangle$  во вращающейся системе координат под действием стационарного эффективного поля  $\mathbf{E}_{\text{эфф}}^*$  начинает прецессировать против часовой стрелки вокруг  $\mathbf{E}_{\text{эфф}}^*$  с частотой

$$\Omega^* = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{\hbar} \mathcal{E}\right)^2}, \quad (11.13)$$

которую обычно называют частотой Раби. Т. е. из (11.10) следует

$$|\langle \mathbf{m}^* \rangle| = \langle \mu_z^0 \rangle \cos(W^* t)$$

и, следовательно,

$$\rho_{22} - \rho_{11} = \frac{\langle \mu_z \rangle}{\gamma} = -\cos(W^* t). \quad (11.14)$$

Учет времен релаксации  $T_1$  и  $T_2$  приведет к затуханию этих колебаний за счет расфазировки диполей. Время расфазировки зависит от разности частот излучения разных диполей, от ширины спектра излучения. В слабом поле время затухания  $\tau \simeq T_2$ . В сильном поле  $\tau$  будет зависеть от  $T_1$ ,  $T_2$ , расстройки  $|\omega_0 - \omega|$  и частоты Раби  $W^*$ . Характерной чертой затухания свободной поляризации является ускоренное падение

интенсивности на приемнике без изменения скорости распада возбуждения верхнего уровня. Дело в том, что синфазно излучение диполей только в первый момент и только вперед по ходу луча. Расфазировка диполей приводит к перераспределению излучения диполей по всем направлениям без изменения мощности излучения каждого диполя по всем направлениям и всей среды. Для справки заметим, что в атомах щелочных металлов  $\tau \simeq 10^{-8}$  с, в молекулах  $\tau \simeq 10^{-6}$  с.

## 11.4. Фотонное эхо

Атомы и молекулы, находящиеся в различном окружении, имеют разные резонансные частоты (неоднородное уширение  $\Delta\omega_D$ ). Рассмотрим набор двухуровневых систем, имеющих некоторое распределение резонансных частот. Пусть вначале все они находятся в основном состоянии, так что все псевдодиполи  $\mathbf{m}^*$  направлены вниз (рис. 21а). Пусть затем в течение времени  $0 \leq t \leq t_1$  на систему действует короткий прямоугольный импульс  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}} \mathcal{E} \exp(ikz - i\omega t)$ . Если  $\frac{\gamma}{h} \mathcal{E} \gg |\omega_0 - \omega|$ , то при таком возбуждении все диполи  $\mathbf{m}^*$  во вращающейся системе координат, где поле  $\mathbf{E}$  неподвижно, должны повернуться вокруг  $\mathbf{E}$  на угол

$$\theta = \int_0^t \frac{\gamma}{h} \mathcal{E} dt. \quad (11.15)$$

Если  $\theta = \pi/2$ , то все диполи окажутся в плоскости  $\mathbf{i} - \mathbf{j}$  (рис. 21б). В лабораторной системе координат они будут прецессировать вокруг оси  $z$ , что приведет к некоторому затягиванию заднего фронта воздействующего импульса за счет когерентного излучения из-за затухания свободной поляризации с временем дефазировки порядка  $T_2^* = 1/\Delta\omega_D$ . Это проявляется в виде веерообразного разбегания отдельных диполей. Если теперь в течение времени  $t_2 \leq t \leq t_3$  на системы подействует второй короткий импульс, причем  $t_3 - t_2 \ll t_2 - t_1$ ,  $\frac{\gamma}{h} \mathcal{E} \gg |\omega_0 - \omega|$  и  $\theta = \pi$ , то во вращающейся системе координат этот импульс заставляет повернуться псевдодиполи вокруг  $\mathbf{E}$  на угол  $180^\circ$ . В результате этого все псевдодиполи  $\mathbf{m}^*$  испытывают зеркальное отражение относительно плоскости  $\mathbf{E} - \mathbf{l}$  (рис. 21г). Из-за зеркального отражения диполей, во вращающейся системе координат диполи должны прецессировать в обратную сторону, причем более быстрые ротаторы начинают догонять более медленные и образованный им веер должен начать складываться. Весь веер схлопывается в положение, когда все ротаторы ориентированы вдоль одного направления (рис. 21д). Необходимое для этого время в

точности равно времени раскрытия веера:  $t_4 - t_3 = t_2 - t_1$ . Все диполи вновь оказываются в фазе, что приводит к излучению импульса. Он имеет ту же круговую поляризацию, что и возбуждающие импульсы.

Амплитуда сигнала эха затухает, как правило, экспоненциально с увеличением времени задержки второго импульса  $\tau$ . Это связано с необратимостью процесса дефазировки диполей из-за однородного уширения со временем  $T_1$ . Заметим, что выбор величин  $\pi/2$  и  $\pi$  для  $\theta$  был проведен только из соображений удобства иллюстрации процесса. Процессы дефазировки и последующей фазировки с излучением эха будут происходить и при иных значениях  $\theta$ .

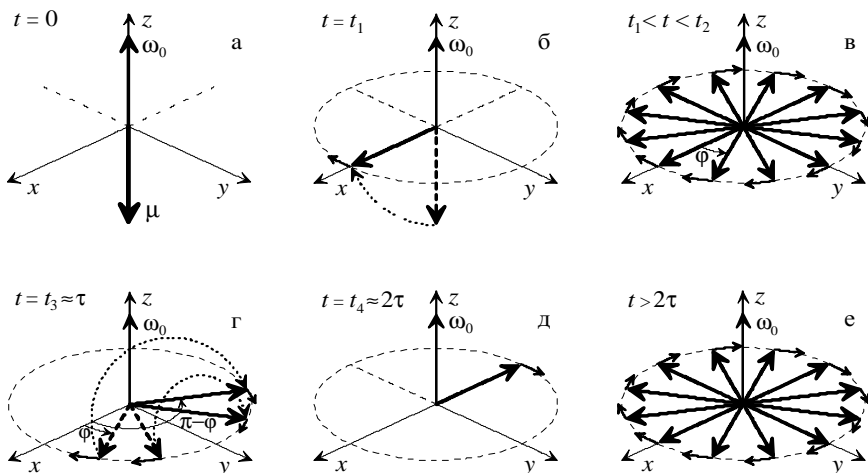


Рис. 21. Формирование фотонного эха. Результаты воздействия на псевдодиполи первого (а) и второго (г) импульсов изображены при формальном допущении, что для соответствующих им моментов времени  $t_1$  и  $t_3$  направление поля  $\mathbf{E}$  совпало с осью  $z$ .

Направление излучения эха определяется условием  $\mathbf{k}_4 = 2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$  (рис. 22). Если второй возбуждающий импульс направлен под некоторым углом к распространения первого, то сигнал эха излучается в направлении под удвоенным углом к первому импульсу.

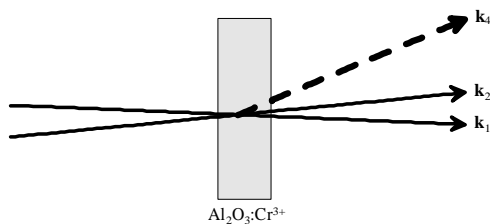


Рис. 22. Схема формирования эха после прохождения через образец из кристалла рубина лазерных импульсов в моменты времени  $t = 0$  и  $t = \tau$ .

После излучения эха дальнейшее движение диполей не синхронизовано, однако, если затем в некоторый момент времени  $T$  на систему воздействовать еще одним импульсом, в момент времени  $T + \tau$  наблюдается еще одно эхо – трехимпульсное (рис. 23). Эксперимент показал, что затухание трехимпульсного эха сравнительно слабо зависит от положения во времени третьего импульса и  $T$  может быть выбрана значительно больше  $\tau$ . Поскольку в данном случае мы имеем дело с четырехволновым смешением, возможна реализации механизма ОВФ. Действительно, в случае обращенного эха ( $\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2 = 0$ )  $\mathbf{k}_s = -\mathbf{k}_1$ , т. е. направление эха противоположно направлению первого импульса возбуждения. Таким образом, формирование сигнала эха обусловлено достаточно большим временем фазовой памяти квантового состояния многоатомной системы. Если первый импульс представляет собой в пространстве расходящуюся волну, а два последующих являются плоскими волнами, направленными противоположно друг другу, то импульс эха будет сходящейся волной.

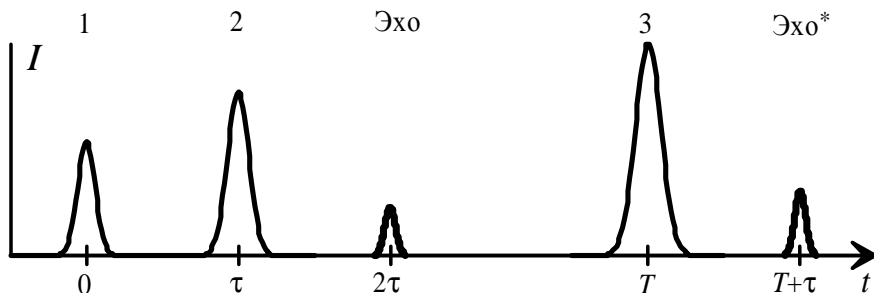


Рис. 23. Трехимпульсное эхо. Четырехволновое последовательное смешение:  $\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$  – соответственно прямое ( $\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2 = 0$ ) и обратное ( $\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2 = 0$ ) эхо.

## 11.5. Самоиндуцированная прозрачность

В плотной протяженной среде возбуждающий импульс испытывает влияние нестационарности отклика среды. Однако, если площадь импульса  $\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{\hbar} \mathcal{E} dt = 2n\pi$ , псевдодиполь  $\mathbf{m}^*$  будет прецессировать вокруг  $\mathcal{E}$ , описывая замкнутые окружности, и вернется, в конце концов, в начальное положение. Несмотря на то, что среда в течение импульса поглощает и излучает фотоны и перераспределяет энергию внутри импульса, в результате импульс сохраняет свою энергию. Таким образом, прошедший импульс искажается только в том случае, если он изначально не имел надлежащей формы.

Используя обозначение  $\theta = \int_{-\infty}^t \frac{\gamma}{\hbar} \mathcal{E} \left( t' - \frac{z}{v_{\text{гп}}} \right) dt'$  уравнения (11.10) и (11.11) можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{1}{\tau^2} \sin \theta, \quad \tau = \frac{v_{\text{гп}}^{-1} - c^{-1}}{4\pi\omega N\gamma S/c\hbar} \quad (11.16)$$

с известным решением

$$\mathcal{E} \left( t - \frac{z}{v_{\text{гп}}} \right) = \frac{\hbar}{\gamma\tau} \operatorname{sech} \left[ \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{z}{v_{\text{гп}}} \right) \right]. \quad (11.17)$$

Соответствующая огибающая импульса имеет площадь

$$A = \theta(t \rightarrow \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{\hbar} \mathcal{E} dt = 2\pi. \quad (11.18)$$

В случае, когда площадь импульса превышает это значение, при прохождении протяженной среды происходит разбиение этого импульса на серию  $2\pi$ -импульсов. Наиболее яркими признаками появления самоиндуцированной прозрачности являются задержка импульса (скорость импульса  $v$  может на несколько порядков отличаться от  $c$ ) и его разбиение.

## 11.6. Сверхизлучение

Система синфазно колеблющихся диполей должна когерентно излучать. Спонтанное излучение такой системы как единого целого было названо *сверхизлучением*. Этот процесс в рамках модели псевдодиполя для двухуровневых систем описывается набором совпадающих псевдодиполей  $\mathbf{m}$ , прецессирующих вместе вокруг оси  $z$ , как показано на рис. 20. Если интенсивность обычного спонтанного излучения экспоненциально затухает с течением времени, то сверхизлучение



представляет собой интенсивный импульс, развивающийся с некоторой задержкой после формирования возбужденного состояния системы. Начальный уровень импульса соответствует интенсивности обычного спонтанного излучения. Кооперативное спонтанное излучение может происходить только в течение времени сохранения фазовой памяти, пока квантовомеханическая система находится в когерентном состоянии. Обратную величину ширины спектральной линии, важную при рассмотрении кооперативных явлений, называют *временем фазовой памяти*.

Для малой системы, размеры которой не превышают длину волны излучения, кооперативный эффект создается всеми  $\mathcal{N}$  диполями системы, синфазно излучающими во всех направлениях, и электрическое поле  $E$  может быть описано непосредственно уравнением (11.11).  $E$  оказывается пропорциональным  $\mathcal{N}$  и приводит к сокращению времени спонтанного распада  $\tau_0$  в  $\mathcal{N}$  раз, т. е. время сверхизлучения  $\tau_s$  имеет порядок величины  $\tau_0/\mathcal{N}$  и характеризует ускоренную потерю энергии диполей. Если же рассматривать протяженную систему, размеры которой превышает длину волны излучения, число диполей, участвующих в спонтанном излучении, оказывается меньше и кооперативный эффект выражен слабее. Для протяженной системы излучение будет направлено вдоль длинной стороны образца  $L$ , и формироваться оно будет с участием только фотонов, испускаемых в пределах дифракционного телесного угла  $\lambda^2/D^2$ , где  $D$  – поперечный размер системы. Фактором ослабления кооперативного эффекта является отношение этого дифракционного угла к  $4\pi$ , и для рассматриваемой протяженной системы имеем

$$\tau_s \approx \frac{\tau_0}{\mathcal{N}} \frac{D^2}{\lambda^2} = \frac{\tau_0}{N} \frac{1}{\lambda^2 L}.$$

Таким образом, сокращение времени спонтанного излучения происходит пропорционально не полному числу диполей, а только числу диполей, заключенных в объеме, ограниченном по длине размерами образца, а в поперечном направлении – длиной волны излучения. Поскольку длительность основной части импульса сверхизлучения имеет порядок величины  $\tau_s$ , т. е. обратно пропорциональна концентрации возбужденных частиц  $N$ , а полная энергия излучения пропорциональна  $N$ , то пиковая интенсивность должна быть пропорциональна  $N^2$ . Это одна из основных особенностей сверхизлучения. Фактически происходит синфазное наложение дипольных моментов и, поскольку интенсивность излучения диполя пропорциональна квадрату дипольного момента, пиковая

интенсивность оказывается пропорциональной  $N^2$ . Важно отметить, что рассматриваемый эффект принципиально отличается от лазерной генерации, когда происходят вынужденные переходы независимо в каждом атоме под влиянием внешнего поля. Все оптические излучательные процессы, происходящие за время, меньшее обратной ширины спектральной линии, имеют сверхизлучательный характер.

Сверхизлучение экспериментально наблюдалось в ряде газов и твердых тел с характерными длительностями импульсов порядка 1 нс – 1 пс. Перспективы применения связаны с возможностью наблюдения сверхизлучения на ядерных переходах, т. е. в гамма-диапазоне частот электромагнитного излучения, применимостью в лазерах на свободных электронах и для преобразования энергии, запасенной на запрещенных переходах.

## Решения задач

**1.1. Решение.** Наиболее вероятным механизмом пробоя воздуха импульсным излучением  $\text{CO}_2$ -лазера является развитие электронной лавины за счет прямой ионизации разогретым в электромагнитном поле первичным электроном. Вкладом каскадных процессов ионизации или фотоионизации можно пренебречь из-за малости квантов излучения лазера на углекислом газе ( $\hbar\omega = 0.124$  эВ). Оценку порога электрического пробоя получим из условия, что электрон в результате действия на него электрического поля световой волны приобретет энергию порядка порога ионизации:  $12 \text{ эВ} = 1.92 \cdot 10^{-11}$  эрг. Эта энергия значительно меньше энергии покоя электрона  $mc^2 \simeq 10^{-6}$  эрг, т. е. при пробое скорость электрона  $v \ll c$ . За один период колебания электрон смещается на расстояние  $L$  порядка

$$v/v \simeq \sqrt{\frac{1.92 \cdot 10^{-11}}{10^{-6}}} \frac{1}{\lambda} \simeq 0.0044\lambda \simeq 4.6 \cdot 10^{-6} \text{ см, где } v - \text{частота света.}$$

Величина  $L$  значительно меньше длины волны  $\lambda \simeq 10.6$  мкм и длины свободного пробега электрона  $l \simeq 3 \cdot 10^{-4}$  см.

Таким образом, период колебаний существенно меньше времени между столкновениями электронов с молекулами и движение электрона в электромагнитном поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$  можно описывать уравнением

$$m\ddot{x} = -e\mathcal{E} \cos \omega t.$$

Интегрируя, получим

$$v = v_0 - \frac{e\mathcal{E}}{m\omega} \sin \omega t.$$

Максимальную кинетическую энергию электрона оценим (вкладом начальной энергии пренебрегаем) из условия

$$\frac{mv^2}{2} \simeq \frac{m}{2} \left( \frac{e\mathcal{E}}{m\omega} \right)^2 = U.$$

Отсюда амплитуда электрического поля

$$\mathcal{E} = \sqrt{2Um} \frac{\omega}{e} = 6.9 \cdot 10^4 \text{ СГСЭ} = 2.1 \cdot 10^7 \text{ В/см,}$$

где  $\omega = 2\pi c/\lambda \simeq 1.78 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ . Плотность потока энергии лазерного луча (модуль вектора Пойтинга)

$$I = |S| = \frac{c}{4\pi} \overline{E^2} = \frac{c}{8\pi} \mathcal{E}^2 = \frac{cUm\omega^2}{4\pi e^2} \simeq 5.7 \cdot 10^{18} \frac{\text{эрг}}{\text{с} \cdot \text{см}^2} \simeq 5.7 \cdot 10^{11} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}.$$

Мощность лазера

$$P = \frac{\pi}{4} d^2 I = \frac{c U m \omega^2 d^2}{16 e^2} = 4.0 \cdot 10^{15} \frac{\text{Эрг}}{\text{с}} \simeq 4.0 \cdot 10^8 \text{ Вт.}$$

*Замечание.* Экспериментальная пороговая плотность пробоя воздуха излучением CO<sub>2</sub>-лазера ([14], §9.6.3) составляет 2·10<sup>9</sup> Вт/см<sup>2</sup>; порог для воздуха, очищенного от пыли, превышает 10<sup>10</sup> Вт/см<sup>2</sup>.

**1.2.** Вероятность образования электрон-позитронных пар (Швингер Ю., 1951 (см. [15]))

$$w = \frac{c e^2 E^2}{4 \pi^3 \hbar^2} \exp\left(-\frac{E_{\text{кр}}}{E}\right), \quad E_{\text{кр}} = \frac{\pi m^2 c^3}{e \hbar}.$$

Для того чтобы вероятность образования электрон-позитронных пар стала заметной, требуется электрическое поле с напряженностью порядка критического  $E_{\text{кр}} = 4.2 \cdot 10^{16}$  В/см, а интенсивность –  $I_{\text{кр}} \simeq 2.3 \cdot 10^{30}$  Вт/см<sup>2</sup>.

**2.1. Решение.** В кубической сингонии первая позиция отвечает направлению [001], вторая – [111], третья – [110]. Операция  $\bar{4}$  для рассматриваемой симметрии совпадает с рассмотренным в примере 2.2. Следовательно и в рассматриваемом случае, в силу симметрии по двум последним индексам и операции  $\bar{4}$ , имеем 12 ненулевых компонент и из них только 4 независимы:

$$\chi_{113}, \quad \chi_{123}, \quad \chi_{311}, \quad \chi_{312}.$$

**Операция 3.** Поворот на  $2\pi/3$  относительно диагонали [111] приводит к следующим соотношениям для независимых компонент:

$$\begin{array}{ll} 1 \rightarrow 2 & \chi_{113} = -\chi_{113} \equiv 0 \\ 2 \rightarrow 3 & \Rightarrow \chi_{311} = -\chi_{311} \equiv 0 \\ 3 \rightarrow 1 & \chi_{312} = \chi_{123} \end{array}$$

В результате остается только 6 ненулевых компонент и только 1 из них независима:

$$\chi_{123} = \chi_{132} = \chi_{213} = \chi_{231} = \chi_{312} = \chi_{321}.$$

**2.2. Решение.** Поскольку векторное произведение параллельных векторов равно 0, имеем

$$\mathbf{P} \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = \mathbf{i} \begin{pmatrix} P_y & P_z \\ E_y & E_z \end{pmatrix} + \mathbf{j} \begin{pmatrix} P_x & P_z \\ E_x & E_z \end{pmatrix} + \mathbf{k} \begin{pmatrix} P_x & P_y \\ E_x & E_y \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

откуда

$$\frac{P_x}{E_x} = \frac{P_y}{E_y} = \frac{P_z}{E_z} = \alpha \equiv \text{const},$$

следовательно,  $P_i - \alpha E_i = (\chi_{ij} - \delta_{ij}\alpha)E_j = 0$  для произвольных  $E_j$ , т. е.  $\chi_{ij} = \delta_{ij}\alpha$ :

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

**2.3. Решение.** При переходе в новую систему координат согласно (2.8) тензор  $\mathbf{e}$  должен принять вид

$$\mathbf{e}' = \mathbf{C}\mathbf{e}\mathbf{C}^T = \mathbf{L} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

где матрица  $\mathbf{C} = (c_{\alpha\beta})$  – матрица направляющих косинусов. Следовательно, с учетом  $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}^{-1}$  должно выполняться равенство

$$\mathbf{C}\mathbf{e} = \mathbf{L}\mathbf{C},$$

в покомпонентной записи для  $i = 1, 2, 3$  имеющем вид

$$c_{i\beta}\epsilon_{\beta j} = \lambda_i\delta_{ij}c_{\beta j} = \lambda_i c_{ij},$$

т. е. ( $i$  – свободный индекс, суммирование только по повторяющемуся индексу  $\beta$ )

$$c_{i\beta}(\epsilon_{\beta j} - \delta_{\beta j}\lambda_i) = 0.$$

Нетривиальное решение этой линейной системы из 3 уравнений ( $j = 1, 2, 3$ ) относительно  $c_{i\beta}$  существует при условии, что

$$\det((\epsilon_{\beta j} - \delta_{\beta j}\lambda_i)) = \det(\mathbf{e} - \lambda_i\mathbf{E}) = 0,$$

где  $\mathbf{E} = (\delta_{ij})$  – единичная матрица. Это соотношение является кубическим

уравнением относительно  $\lambda_i$ , определяющим три действительных решения в случае симметричного тензора  $e$ . Найденные значения  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) позволяют найти значения  $c_{i\beta}$  ( $\beta = 1, 2, 3$ ), т. е. определить ориентировку главных осей тензора. Далее заметим (см. приложение Б), что характеристический полином тензора  $e$  является инвариантом, т. е. для всех  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) должно выполняться

$$\det(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{E}) = \det(e - \lambda \mathbf{E}) = 0,$$

что возможно только для тензора  $\mathbf{L}$  с диагональными элементами, составленными из всех трех собственных значений тензора  $e$ .

Итак, симметричный тензор приводится к главным осям, причем диагональные элементы равны собственным значениям тензора.

Собственные значения  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) тензора  $e$ , приведенного в условиях задачи, определяются условием

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.  $(3 - \lambda)^2(4 - \lambda) - (4 - \lambda) = 0$  или  $(4 - \lambda)^2(2 - \lambda) = 0$ .

Тензор относительно главных осей имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, это одноосный кристалл (тригональная, тетрагональная или гексагональная сингонии).

**3.1. Решение.** Для рассматриваемого в задаче потенциала система уравнений движения для  $x$  и  $Q$  имеет вид

$$\hat{D}x \equiv \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m}E + 2\frac{\eta}{m}xQ,$$

$$\hat{D}Q \equiv \ddot{Q} + 2\Gamma \dot{Q} + \Omega_0^2 Q = \frac{\eta}{M}x^2.$$

Рассмотрим случай, когда внешнее электромагнитное поле представляет собой сумму двух плоских монохроматических волн с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ( $\omega_1 - \omega_2 \equiv \Omega \approx \Omega_0$ ):

$$E = \text{Re}[\mathcal{E}_1 \exp(-i\omega_1 t)] + \text{Re}[\mathcal{E}_2 \exp(-i\omega_2 t)].$$

Решение будем искать в виде разложения по малому параметру ангармонизма  $\eta$ :

$$x(t) = \sum_m x^{(m)}(t), \text{ где } x^{(m)} \propto \eta^m E^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Подставляя смещения  $\{x_1, x_2, Q\}$  в рассматриваемом виде в исходные уравнения и приравнивая слагаемые одного порядка малости, получим связанную систему уравнений для компонент решения на основных частотах  $\omega_i$  ( $i = 1, 2$ ) и  $\Omega$

$$\hat{D}x_i^{(0)}(\omega_i) = -\frac{e}{m}E, \quad \hat{D}x_i^{(1)}(\omega_i) = \frac{2\eta}{m}x_i^{(0)}Q^{(0)},$$

$$\hat{D}x_i^{(2)}(\omega_i) = \frac{2\eta}{m}(x_i^{(1)}Q^{(0)} + x_{3-i}^{(0)}Q^{(1)}), \dots$$

$$\hat{D}Q^{(0)}(\Omega) = 0, \quad \hat{D}Q^{(1)}(\Omega) = \frac{\eta}{M}(x_1^{(0)} + x_2^{(0)})^2,$$

$$\hat{D}Q^{(2)}(\Omega) = \frac{2\eta}{M}(x_1^{(0)}x_2^{(1)*} + x_2^{(0)*}x_1^{(1)}), \dots$$

и аналогичные уравнения для смещений на комбинациях частот  $\omega_1, \omega_2$  и  $\Omega$ .

### *Нулевое приближение*

В нулевом приближении ( $\eta = 0$ ) уравнение для  $x$  становится линейным с классическим гармоническим решением  $x_i^{(0)} = \text{Re}[x_i^0 \exp(-i\omega_i t)] = \frac{1}{2}[x_i^0 \exp(-i\omega_i t) + x_i^{0*} \exp(i\omega_i t)]$  ( $i = 1, 2$ ) с комплексной амплитудой

$$x_i^0(\omega_i) = \frac{-e/m}{D(\omega_i)}\mathcal{E}_i.$$

Следовательно, линейные поляризуемость свободного электрона, связанная со смещением заряда через определение дипольного момента  $d_i = -ex_i^0 = \alpha(\omega_i)\mathcal{E}_i$ , и, соответственно, восприимчивость имеют вид (3.12) и (3.13).

В рассматриваемом приближении  $Q^{(0)}(\Omega) = 0$ .

### *Первое приближение*

В первом приближении для нелинейной силы  $\eta x^2$  оставим лишь резонансное слагаемое с частотой  $\Omega_0$ , которое пропорционально  $x_1^{(0)}x_2^{(0)*}$ . Соответствующее уравнение колебательного движения имеет вид:

$$\hat{D}Q^{(1)}(\Omega) = \frac{\eta}{2M}x_1^{(0)}x_2^{(0)*}$$

с решением  $Q^{(1)} = \text{Re}[Q^1 \exp(-i\Omega t)]$ , где комплексная амплитуда

$$Q^1(\Omega) = \frac{\eta x_1^{(0)} x_2^{(0)*}}{2MD(\Omega)} = \frac{\eta e^2 \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^*}{2Mm^2 D(\Omega) D(\omega_1) D^*(\omega_2)}.$$

В рассматриваемом приближении поправок к  $x_i$  нет:  $x_i^{(1)} = 0$ .

Падающее излучение с подходящей областью частот раскачивает внутримолекулярные колебания. Это приводит к дополнительному когерентному рассеянию света на антистоксовой  $\omega_3 \equiv \omega_1 + \Omega = 2\omega_1 - \omega_2$  и стоксовой  $\omega_4 \equiv \omega_2 - \Omega = 2\omega_2 - \omega_1$  частотах.

### *Второе приближение*

В этом приближении найденные ненулевые поправки  $x_i^{(0)}$  и  $Q^1(\Omega)$  приводят к появлению в уравнении движения для  $x$  слагаемых для нелинейной силы  $\eta x_i^{(0)} Q^{(1)}$  и  $\eta x_i^{(0)} Q^{(1)*}$  ( $i = 1, 2$ ) и, следовательно, поляризации на частотах

$$\omega_1 \equiv \omega_2 + \Omega = \omega_2 + \omega_1 - \omega_2,$$

$$\omega_2 \equiv \omega_1 - \Omega = \omega_1 - \omega_1 + \omega_2,$$

$$\omega_3 \equiv \omega_1 + \Omega = 2\omega_1 - \omega_2,$$

$$\omega_4 \equiv \omega_2 - \Omega = 2\omega_2 - \omega_1.$$

Соответствующие поправки имеют вид:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{\eta x_2^{(0)} Q^{(1)}}{mD(\omega_1)} = \frac{-\eta e^3 \mathcal{E}_1 |\mathcal{E}_2|^2}{2Mm^2 D(\Omega) D^2(\omega_1) D(\omega_2) D^*(\omega_2)}, \\ x_2^{(2)} &= \frac{\eta x_1^{(0)} Q^{(1)*}}{mD(\omega_2)} = \frac{-\eta e^3 |\mathcal{E}_1|^2 \mathcal{E}_2}{2Mm^2 D^*(\Omega) D(\omega_1) D^*(\omega_1) D^2(\omega_2)}, \\ x_3^{(2)} &= \frac{\eta x_1^{(0)} Q^{(1)}}{mD(\omega_3)} = \frac{-\eta e^3 \mathcal{E}_1^2 \mathcal{E}_2^*}{2Mm^2 D(\Omega) D^2(\omega_1) D^*(\omega_2) D(\omega_3)}, \\ x_4^{(2)} &= \frac{\eta x_2^{(0)} Q^{(1)*}}{mD(\omega_4)} = \frac{-\eta e^3 \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2^2}{2Mm^2 D^*(\Omega) D^*(\omega_1) D^2(\omega_2) D(\omega_4)}. \end{aligned}$$

С учетом объемной концентрации молекул  $N$  получим значение нелинейной (кубичной) восприимчивости  $\chi^{(3)} = -eN x_j^{(2)}$ , имеющий сформулированный в условиях задачи вид в нерезонансном приближении (т. е. когда  $\omega_j \ll \omega_0$ , и, следовательно,  $D(\omega_j) \simeq \omega_0^2$ ).

Заметим, что поправка  $x_1^{(2)}$  в соответствие с определением дипольного момента  $d$  и поляризуемости  $\alpha$  ( $d = \alpha E = -ex$ ) приводит к зависимости  $\alpha$



от  $Q^{(1)}$ , представимой в форме  $\alpha(Q) = \alpha(0) + \frac{\partial \alpha}{\partial Q} Q$  с плачевской поляризуемостью

$$\frac{\partial \alpha}{\partial Q} = \frac{2e^2 \eta}{m^2 D(\omega_1) D(\omega_2)}.$$

**3.2. Решение.** Выберем начало сферической системы координат в центре шара (полярный угол  $\theta$  отсчитывается от направления  $\mathbf{E}_0$ ) и будем искать потенциал поля вне шара в виде

$$\varphi = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + \varphi_1,$$

где первое слагаемое есть потенциал приложенного электрического поля, а  $\varphi_1$  дает искомое значение потенциала, вызываемое шаром. Ввиду симметрии шара функция  $\varphi_1$  может зависеть только от одного постоянного вектора  $\mathbf{E}_0$ . Имеем (см. приложение В)

$$\tilde{\nabla}^2(r^n \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) = n(n+3)r^{n-2} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}.$$

Следовательно, единственное такое решение уравнения Лапласа, обращающееся в нуль на бесконечности, есть

$$\varphi_1 = A \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Потенциал же поля внутри шара ищем в виде

$$\varphi_1 = \text{const} - B \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r},$$

поскольку это единственная функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа ( $\tilde{\nabla}^2 \varphi_1 = 0$ ), остающаяся конечной в центре шара и зависящая только от постоянного вектора  $\mathbf{E}_0$  – единственного параметра, входящего в данную задачу. Постоянные  $A$  и  $B$  определяются граничными условиями на поверхности шара. Сразу отметим, что поле внутри шара  $\mathbf{E}_1 = -\tilde{\nabla} \varphi_1 = B \mathbf{E}_0$  оказывается однородным.

Граничное условие непрерывности потенциала

$$B E_0|_{\theta=\pi/2, r=R} = E_0 - A \frac{E_0}{r^3} \Big|_{\theta=\pi/2, r=R}$$

дает ( $R$  – радиус шара)

$$1 - B = \frac{A}{R^3},$$

а из условия непрерывности нормальной составляющей индукции

$$D = \varepsilon B E_0 = -\varepsilon_0 \tilde{\mathbf{N}} \left( -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + A \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \Big|_{\theta=0, r=R} = \varepsilon_0 E_0 + 2\varepsilon_0 A \frac{E_0}{R^3}$$

следует

$$\varepsilon B = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \frac{2A}{R^3}.$$

Исключая  $A$ , получим

$$B = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}$$

и, следовательно,

$$E = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0.$$

Это означает, что шар имеет постоянную поляризованность

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}_0) = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E} = \frac{3\varepsilon_0}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0,$$

которая соответствует дипольному моменту шара

$$\mathbf{p} = R^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \varepsilon_0 \mathbf{E}_0$$

и поверхностной плотности связанных зарядов

$$\sigma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \frac{3\varepsilon_0}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \cos \theta,$$

где  $\theta$  – угол между нормалью  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$  и  $\mathbf{E}_0$  для рассматриваемой точки на поверхности шара.

**3.3. Решение.** Поверхностная плотность поляризационных зарядов на границе диэлектрика задается формулой (см. задачу 3.1)

$$\sigma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности. Точечный заряд  $\delta q$  создает в точке  $\mathbf{r}$  электрическое поле

$$\delta \tilde{\mathbf{E}} = \frac{\delta q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Следовательно, поле в центре сферы радиусом  $R$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}=0) &= \oint \frac{\boldsymbol{\sigma}}{R^2} d\mathbf{S} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{P} \cos \theta R^2 \sin \theta d\varphi}{R^2} \cos \theta = \\ &= 2\pi \mathbf{P} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}.\end{aligned}$$

**3.4. Решение.** Действительно,

$$n - 1 = \sqrt{1 + 4\pi\chi^{(1)}} - 1 \simeq \frac{2\pi e^2 N}{mD(\omega)} \simeq \frac{2\pi e^2 N}{m\omega_0^2} \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right).$$

Согласно модели атома Бора частоту  $\omega_0$  можно оценить по формуле  $\hbar\omega_0 = \epsilon$ , где  $\epsilon = me^4/(2\hbar^2) = 13.6$  эВ. Следовательно, для нормальных условий ( $N = 2.7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ )  $\lambda_0 \simeq 0.1$  мкм,  $A \simeq 1.2 \cdot 10^{-4}$ ,  $B \simeq 0.01$  мкм<sup>2</sup>.

**6.1. Решение** см. [1], задача к §118.

**8.1. Решение.** Для тензора восприимчивости третьего порядка  $\mathbf{c}^{(3)}$  в прозрачной среде имеем

$$\chi_{ijkl}(-\omega, \omega, \omega, -\omega) = \chi_{ijkl}^*(-\omega, \omega, \omega, -\omega) = \chi_{ijkl}(\omega, -\omega, -\omega, \omega)$$

и, следовательно,  $\mathbf{c}^{(3)}$  является вещественной четной функцией частоты. Наличие центра инверсии приводит к тому, что только составляющие  $\mathbf{c}^{(3)}$  с парными индексами являются ненулевыми (т. е. только  $\chi_{iijj}$ ,  $\chi_{ijij}$  и  $\chi_{ijji}$  отличны от нуля). Тогда  $i$ -ая компонента поляризации для отличных от нуля (парных) индексов имеет вид

$$\begin{aligned}P_i^{(3)}(\omega) &= \chi_{ijkl}(-\omega, \omega, \omega, -\omega) E_j(\omega) E_k(\omega) E_l(-\omega) = \\ &= \chi_{ijkl}(-\omega, \omega, \omega, -\omega) E_j(\omega) E_k(\omega) E_l^*(\omega) = \\ &= \chi_{iikk} E_i |E_k|^2 + \chi_{iijj} |E_j|^2 E_i + \chi_{ijji} E_j^2 E_i^* = \\ &= (\chi_{iijj} + \chi_{ijij}) |E_j|^2 E_i + \chi_{ijji} E_j^2 E_i^* = \\ &= \chi_{iiii} E_i E_i E_i^* + (\chi_{iijj} + \chi_{ijij}) |E_{j \neq i}|^2 E_i + \chi_{ijji} E_{j \neq i}^2 E_i^*.\end{aligned}$$

Здесь при суммировании по связанным индексам, слагаемые, различающиеся только порядком записи электрического поля, учитывались однократно. Далее заметим, что в силу симметрии относительно преобразования инверсии тензор восприимчивости третьего порядка в изотропной среде имеет 21 отличный от нуля элемент, причем только три элемента являются независимыми:

$$\begin{aligned}
\chi_{xxyy} &= \chi_{xxzz} = \chi_{yyxx} = \chi_{yyzz} = \chi_{zzxx} = \chi_{zzyy}, \\
\chi_{xyxy} &= \chi_{xzzx} = \chi_{yxyx} = \chi_{yzyz} = \chi_{zxxz} = \chi_{zyyz}, \\
\chi_{xyyx} &= \chi_{xzzx} = \chi_{yxyx} = \chi_{yzyz} = \chi_{zxxz} = \chi_{zyyz}, \\
\chi_{xxxx} &= \chi_{yyyy} = \chi_{zzzz} = \chi_{xxyy} + \chi_{xyxy} + \chi_{xyyx}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
P_i^{(3)} &= \chi_{1111}|E_i|^2 E_i + (\chi_{1122} + \chi_{1212})|E_{j \neq i}|^2 E_i + \chi_{1221} E_{j \neq i}^2 E_i^* = \\
&= \chi_{1111}|E_i|^2 E_i + (\chi_{1122} + \chi_{1212})(|\mathbf{E}|^2 - |E_i|^2) E_i + \chi_{1221}(\mathbf{E}^2 - E_i^2) E_i^* = \\
&= (\chi_{1111} - \chi_{1122} - \chi_{1212} - \chi_{1221}) E_i E_i E_i^* + (\chi_{1122} + \chi_{1212}) |\mathbf{E}|^2 E_i + \chi_{1221} \mathbf{E}^2 E_i^* = \\
&= (\chi_{1122} + \chi_{1212}) |\mathbf{E}|^2 E_i + \chi_{1221} \mathbf{E}^2 E_i^*
\end{aligned}$$

или

$$\mathbf{P}^{(3)} = (\chi_{1122} + \chi_{1212}) |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} + \chi_{1221} \mathbf{E}^2 \mathbf{E}^*.$$

## 8.2. Решение.

а) Для линейно поляризованного поля  $\mathbf{E}$   $\mathbf{E}^2 \mathbf{E}^* = |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}^{(3)} = \{\alpha(\omega) + \beta(\omega)\} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}$ . Действительно,

$$\mathbf{E}_L = i\mathbf{E}_x = iE, \quad E = \mathcal{E} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t),$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_L^2 \mathbf{E}_L^* &= [i\mathcal{E} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)]^2 i\mathcal{E} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t) = \\
&= i\mathcal{E}^3 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) = \mathcal{E}^2 \mathbf{E}_L = |\mathbf{E}_L|^2 \mathbf{E}_L.
\end{aligned}$$

б) В случае круговой поляризации  $\mathbf{E}^2 = 0$  и  $\mathbf{P}^{(3)} = \alpha(\omega) |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}$ . Действительно,

$$\mathbf{E}_O = i\mathbf{E}_x + ij\mathbf{E}_y = (i \pm ij)E, \quad E = \mathcal{E} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t),$$

следовательно,

$$\mathbf{E}_O^2 \equiv \mathbf{E}_O \cdot \mathbf{E}_O = (i \pm ij)^2 EE = (\mathbf{i}^2 - \mathbf{j}^2) E^2 = 0.$$

Знак "+" соответствует правополяризованному, а "-" – левополяризованному свету.

**9.1. Решение.** Пусть волна распространяется в направлении оси  $z$ , электрическое поле направлено вдоль  $x$ , а магнитное – вдоль  $y$ . Применяя (9.4) к рассматриваемому случаю  $n(t) = n_0 + \alpha t$ , получим

$$D(z, t) = F(\xi), \quad \xi = z - \int_0^t \frac{cdt}{n_0 + \alpha t} = z - \frac{c}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{\alpha}{n_0} t \right). \quad (*)$$

Сначала рассмотрим уширение импульса. Пусть "колоколообразный" импульс описывается функцией  $F(\xi)$  такой, что

$$F(\xi = 0) = 1, \quad F(\pm \xi_0) = \frac{1}{2}.$$

Тогда положение вершины ( $\xi = 0$ ) описывается уравнением

$$z = \frac{c}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{\alpha}{n_0} t \right),$$

а положение точек на полувысоте ( $\xi = \pm \xi_0$ ), т. е. где

$$\frac{E(\pm \xi_0)}{E(0)} = \frac{D(\pm \xi_0)}{D(0)} = \frac{1}{2},$$

формулой

$$\pm \xi_0 = z - \frac{c}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{\alpha}{n_0} t_{\mp} \right) = \frac{c}{\alpha} \ln \frac{1 + \frac{\alpha}{n_0} t}{1 + \frac{\alpha}{n_0} t_{\mp}}.$$

Следовательно, для ширины импульса по полувысоте имеем

$$\tau = t_+ - t_- = 2 \left( \frac{n_0}{\alpha} + t \right) \text{sh} \left( \frac{\alpha}{c} \xi_0 \right) = \tau_0 \left( 1 + \frac{\alpha t}{n_0} \right) = \tau_0 \exp \frac{\alpha z}{c},$$

где начальная ширина импульса

$$\tau_0 = \tau(t = 0) = 2 \frac{n_0}{\alpha} \text{sh} \left( \frac{\alpha}{c} \xi_0 \right).$$

Далее рассмотрим изменение средней частоты импульса. Пусть при  $z = 0$  компонента фурье разложения индукции входного импульса имеет вид

$$D(z = 0, t) = \mathcal{D}_0 \exp(-i\omega t).$$

Тогда согласно (\*) при  $z = 0$  имеем

$$D(0, t) = F \left( -\frac{c}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{\alpha}{n_0} t \right) \right) = \mathcal{D}_0 \exp(-i\omega t),$$

$$\xi = z - \frac{c}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{\alpha}{n_0} t \right) \Big|_{z=0} = -\frac{c}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{\alpha}{n_0} t \right).$$

Исключая  $t$ , получим

$$F(\xi) = \mathcal{D}_0 \exp \left( -i\omega \frac{n_0}{\alpha} \left[ \exp \left( -\frac{\alpha}{c} \xi \right) - 1 \right] \right).$$

Следовательно, в переменных  $(z, t)$  решение приводится к виду:

$$E(z, t) = \frac{D(z, t)}{n^2(t)} = \frac{F(\xi)}{n^2(t)} = \frac{\mathcal{D}_0}{(n_0 + \alpha t)^2} \exp(-i\theta(z, t)),$$

где обозначено  $\theta = -\frac{\omega}{\alpha} \left[ (n_0 + \alpha t) \exp(-\frac{\alpha}{c} z) - n_0 \right]$ .

Для "мгновенных" частоты  $\tilde{\omega}$  и волнового числа  $\tilde{k}$  можем записать

$$\tilde{\omega} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega \exp\left(-\frac{\alpha}{c} z\right),$$

$$\tilde{k} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\omega}{c} (n_0 + \alpha t) \exp\left(-\frac{\alpha}{c} z\right) = \frac{\tilde{\omega}}{c} (n_0 + \alpha t).$$

Заметим, что в рассматриваемой среде фазовая и групповая скорости совпадают:

$$v = \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{k}} = \frac{c}{n_0 + \alpha t}, \quad v_{\text{гр}} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{k}} = -\frac{\partial \tilde{k} / \partial t}{\partial \tilde{k} / \partial z} = \frac{c}{n_0 + \alpha t}.$$

Таким образом, длительность импульса после прохождения электрооптической ячейки Поккельса увеличится в  $\exp(\frac{\alpha}{c} l) \simeq 1.1$  раз, средняя частота уменьшится в  $\exp(\frac{\alpha}{c} l) \simeq 1.1$  раз.

## Приложение А. Ортогональные преобразования

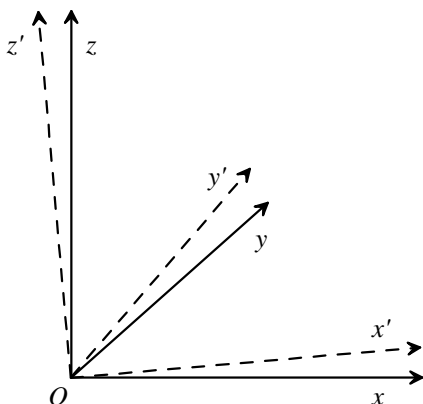


Рис. А.1. Две системы прямоугольных декартовых координат  $Oxyz$  и  $Ox'y'z'$  с общим началом координат  $O$ .

В физике часто приходится переходить от одной системы координат, например, от лабораторной  $Ox_1x_2x_3$ , к другой, например,  $O'x'_1x'_2x'_3$ . В случае, когда обе системы координат имеют общее начало координат  $O$ , можно написать следующие соотношения для преобразования координат

$$x'_\alpha = c_{\alpha\beta}x_\beta, \quad x_\alpha = c_{\beta\alpha}x'_\beta. \quad (\text{A.1})$$

Здесь  $c_{\alpha\beta}$  – косинусы углов между новыми  $(x'_\alpha)$  и старыми осями  $(x_\alpha)$  ( $c_{\alpha\beta} = \cos \widehat{x'_\alpha, x_\beta}$ ), т. е. *направляющие косинусы*. В матричных обозначениях (А.1) имеет вид

$$x' = \mathbf{C}x, \quad x = \mathbf{C}^T x', \quad \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T, \quad (\text{A.2})$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \widehat{x', x} & \cos \widehat{x', y} & \cos \widehat{x', z} \\ \cos \widehat{y', x} & \cos \widehat{y', y} & \cos \widehat{y', z} \\ \cos \widehat{z', x} & \cos \widehat{z', y} & \cos \widehat{z', z} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

В соотношениях (А.1) используемый однократно индекс  $\alpha$  называют *свободным индексом*, а индекс  $\beta$ , пробегающий последовательно значения 1, 2, 3 – *суммирующим* (или *связанным*) *индексом*. Таким

образом, развернутое первое соотношение в (А.1) имеет вид

$$x'_\alpha = c_{\alpha 1}x_1 + c_{\alpha 2}x_2 + c_{\alpha 3}x_3 = \sum_{\beta=1}^3 c_{\alpha\beta}x_\beta.$$

Направляющие косинусы обладают следующими свойствами:

а) удовлетворяют условиям ортогональности

$$c_{i\alpha}c_{j\alpha} = c_{\alpha i}c_{\alpha j} = \delta_{ij};$$

б) для суммы квадратов направляющих косинусов выполняется условие нормировки

$$c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + c_{3i}^2 = 1;$$

с) величина детерминанта преобразования  $(c_{\alpha\beta})$  равна -1 или 1 в зависимости от того, изменяется ли при преобразовании взаимная ориентация осей системы или нет. Для доказательства этого заметим, что любое преобразование можно свести к последовательным поворотам вокруг осей и инверсиям (смене знака оси), а для них это условие выполняется. Например, для поворота вокруг оси  $z$  на угол  $\varphi$  или смене его знака имеем соответственно

$$\begin{aligned} \det(c_{\alpha\beta}) &= \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \cos \varphi \begin{vmatrix} \cos \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \sin \varphi \begin{vmatrix} -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1, \end{aligned}$$

$$\det(c_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Другими простейшими примерами таких преобразований, изменяющими или не изменяющими взаимную ориентацию осей системы, являются соответственно тождественное преобразование и инверсия:



$$(c_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{\alpha\beta}) \text{ и } (c_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -(\delta_{\alpha\beta}). \quad (\text{A.4})$$

Здесь  $\delta_{\alpha\beta}$  – символ Кронекера, а  $(\delta_{\alpha\beta})$  имеет смысл единичной матрицы.

В ряде случаев переход от одной системы к другой удобнее рассматривать как последовательность поворотов относительно осей (и, возможно, инверсии). В случае поворота на угол  $\varphi$  вокруг оси  $x_3$  можем записать

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если затем повернем еще на угол  $\theta$  относительно новой оси  $x'_2$ , то результирующее преобразование можно представить в виде следующей матрицы:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если еще повернем на угол  $\psi$  относительно новой оси  $x'_3$ , то результирующее преобразование, достаточное для однозначного определения любого вращения, будет иметь вид

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \sin \theta \cos \varphi & \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \theta \sin \varphi & -\sin \psi \cos \theta \\ -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \sin \theta \cos \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \theta \sin \varphi & \cos \psi \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Преобразование произвольного полярного вектора  $\mathbf{A}$  (например, радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , электрического поля  $\mathbf{E}$  или поляризации  $\mathbf{P}$ ) производится аналогично преобразованию координат, поскольку оно также является преобразованием компонент радиус-вектора:

$$A'_\alpha = c_{\alpha\beta} A_\beta, \quad (\text{A.5})$$

однако в случае аксиального вектора  $\mathbf{A}$  (например, вектора угловой скорости  $\mathbf{w}$ , момента импульса  $\mathbf{K}$  или магнитного поля  $\mathbf{B}$ )

$$A'_\alpha = \det(c_{\alpha\beta}) c_{\alpha\beta} A_\beta = \pm c_{\alpha\beta} A_\beta,$$

где знак плюс соответствует преобразованиям, которые не изменяют взаимной ориентации осей системы координат, а знак минус – преобразованиям, изменяющим взаимную ориентацию осей системы.

Естественно, при смене системы координат квадрат вектора сохраняется (является инвариантом):

$$\mathbf{A}'^2 = A'_i A'_i = c_{i\alpha} c_{i\beta} A_\alpha A_\beta = \delta_{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta = A_\alpha A_\alpha = \mathbf{A}^2.$$

Аналогично убеждаемся, что скалярное произведение двух векторов также является инвариантом

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i = A'_\alpha B'_\alpha = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}'.$$

## Приложение Б. Тензоры в прямоугольной системе координат

Помимо скаляров и векторов в физике используются тензорные величины. Далее основное внимание уделим только тензорам  $\mathbf{T}^{(n)}$  ранга  $n \geq 2$ , которые связывают один трехмерный вектор  $\mathbf{A}$  с другими трехмерными векторами  $\mathbf{B}_i$ ,  $i = 1 \dots n - 1$ , имеющими физический смысл (т. е. независимыми от случайного выбора системы координат):

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{(n)} : \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \dots \mathbf{B}_{n-1}.$$

Однако заметим, что в общем случае физический смысл тензоров может быть достаточно разным. Например, скаляр (число) или вектор можно рассматривать, соответственно, как тензор *нулевого*  $\mathbf{T}^{(0)}$  или *первого*  $\mathbf{T}^{(1)}$  ранга, а векторный оператор дифференцирования набла

$$\tilde{\mathbf{N}} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

в тензорной записи имеет вид

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

В случае, когда физический смысл записи ясен из контекста, будет использоваться также упрощенная форма записи тензорных выражений, например, в виде  $\mathbf{P} = c \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2$ .

В индексной (или тензорной записи) тензор первого ранга обозначается символом  $T_i$ , где свободный индекс пробегает набор чисел  $x, y, z$ . В матричной записи тензор первого ранга записывается в виде матрицы

$$\mathbf{T}^{(1)} = (T_i) = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{T}^{(1)} = (T_i) = (T_x \ T_y \ T_z).$$

Тензор второго ранга  $\mathbf{T}^{(2)}$ , который можно обозначить символом  $T_{ij}$  с двумя нижними свободными индексами  $i, j$ , записывается в виде квадратной матрицы

$$\mathbf{T}^{(2)} = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}.$$

Первый нижний индекс  $i$  обозначает строку матрицы, а второй  $j$  – ее столбец.  $T_{xx}$ ,  $T_{yy}$ ,  $T_{zz}$  называются диагональными составляющими, а остальные – недиагональными составляющими. Аналогично можно ввести тензоры  $n$ -го ранга с набором  $3^n$  составляющих.

Складывать или вычитать можно только тензоры одинакового ранга и с одинаковыми индексами; кроме того, они должны быть определены в одной и той же точке и в одной и той же системе координат. Тогда

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

Тензор *симметричен*, если

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (\text{т. е. } \mathbf{T}^T = \mathbf{T}),$$

и *антисимметричен* (или *кососимметричен*), если

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad (\text{т. е. } \mathbf{T}^T = -\mathbf{T}).$$

Свойства симметрии и антисимметрии не зависят от системы отчета. Любой тензор второго ранга можно разложить на сумму симметричного  $A_{ij}$  и антисимметричного  $B_{ij}$  тензоров

$$T_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \quad A_{ij} = (T_{ij} + T_{ji})/2, \quad B_{ij} = (T_{ij} - T_{ji})/2.$$

При умножении двух тензоров друг на друга следует перемножать соответствующие составляющие каждого из тензоров. При этом получается тензор суммарного ранга, например,

$$T_{ij} = A_i B_j, \quad T_{ijk} = T_{ij} T_k \neq T_k T_{ij}.$$

Перемножение тензоров, в результате которого получается новый тензор с разными индексами (так же, как и в приведенных выше примерах), называется *внешним умножением*. При этом получаются тензор суммарного ранга:  $\mathbf{T}^{(r)} \mathbf{T}^{(s)} = \mathbf{T}^{(r+s)}$ .

В связи с тем, что тензор является физической величиной (имеющей некоторый частный вид в выбранной системе координат), то при преобразовании системы координат он должен преобразовываться определенным образом, так, чтобы сохранялась требуемая взаимосвязь между физическими величинами. Такое свойство называется *тензорным*

свойством.

Рассмотрим трансформационные свойства тензора второго ранга при различных вращениях системы координат. Под вращением системы координат будем понимать переход от одной упорядоченной совокупности взаимно перпендикулярных осей, обозначаемых  $x_1, x_2, x_3$  к другой, обозначенной  $x'_1, x'_2, x'_3$ , без изменения положения начала координат. Тогда (см. (А.1))

$$x'_\alpha = c_{\alpha\beta}x_\beta, \quad x_\alpha = c_{\beta\alpha}x'_\beta,$$

где  $c_{\alpha\beta} = \cos \widehat{x'_\alpha, x_\beta}$  – направляющие косинусы углов между новыми ( $x'_\alpha$ ) и старыми осями ( $x_\alpha$ ).

Преобразование произвольного полярного вектора **A** (например, радиус-вектора **r**, электрического поля **E** или поляризации **P**) производится аналогично преобразованию координат, поскольку это также преобразование компонент радиус-вектора:

$$A'_\alpha = c_{\alpha\beta}A_\beta. \quad (\text{Б.1})$$

Обобщая (Б.1) для тензора первого ранга, или вектора (полярного), на случай тензоров произвольного ранга, получим, что если переход от одной прямоугольной системы координат к другой задается (А.1), то тензоры преобразуются в соответствии с формулами

$$T'_\alpha = c_{\alpha\beta}T_\beta, \quad T'_{\alpha\beta} = c_{\alpha\gamma}c_{\beta\delta}T_{\gamma\delta}, \quad T'_{\alpha\beta k} = c_{\alpha\gamma}c_{\beta\delta}c_{k\eta}T_{\gamma\delta\eta}, \dots \quad (\text{Б.2})$$

для тензоров первого, второго, третьего и более высоких рангов, соответственно. В частности, для тензора второго ранга развернутый вид этого соотношения выглядит следующим образом ( $\gamma$  и  $\delta$  – связанные индексы, по которым выполняется суммирование):

$$\begin{aligned} T'_{\alpha\beta} = & c_{\alpha 1}c_{\beta 1}T_{11} + c_{\alpha 1}c_{\beta 2}T_{12} + c_{\alpha 1}c_{\beta 3}T_{13} + \\ & + c_{\alpha 2}c_{\beta 1}T_{21} + c_{\alpha 2}c_{\beta 2}T_{22} + c_{\alpha 2}c_{\beta 3}T_{23} + c_{\alpha 3}c_{\beta 1}T_{31} + c_{\alpha 3}c_{\beta 2}T_{32} + c_{\alpha 3}c_{\beta 3}T_{33}. \end{aligned}$$

Из этой записи видно преимущество в лаконичности тензорной символики. Каждой паре свободных индексов  $\alpha$  и  $\beta$ , пробегающих значения  $x, y, z$ , отвечает одно такое уравнение, т. е. в итоге получим девять уравнений с девятью слагаемыми в правой части, определяющими элементы матрицы **T'**.

В тензорном исчислении существует операция свертывания: приравнивания двух свободных индексов и суммирования по ним (т. е. эти индексы становятся суммирующими). Операция свертывания снижает

ранг тензора на два. Эту операцию можно трактовать как умножение тензора на единичный тензор  $\delta_{ij}$ , т. е.

$$\begin{aligned}T_{ij}\delta_{ij} &= T_{ii} \quad (\text{скаляр}), \\T_{ijk}\delta_{jk} &= T_{ijj} \quad (\text{вектор}), \\T_{ijkl}\delta_{ij}\delta_{kl} &= T_{iikk} \quad (\text{скаляр}), \\T_{ij}T_{klm}\delta_{jm} &= T_{ij}T_{klj} = T_{ikl}.\end{aligned}$$

Легко проверить, что единичная матрица обладает тензорным свойством:

$$\delta'_{ij} = c_{i\alpha}c_{j\beta}\delta_{\alpha\beta} = c_{i\alpha}c_{j\alpha} = \delta_{ij}.$$

Комбинацию внешнего умножения тензоров и свертывания (см. пример выше) иногда называют *внутренним умножением векторов*. Однако проверим, действительно ли при операции свертывания сохраняются тензорные свойства. Пусть имеется тензор  $T'_{ijk} = c_{i\alpha}c_{j\beta}c_{k\gamma}T_{\alpha\beta\gamma}$ . Свертывая по индексам  $jk$ , получим:

$$T'_{ijk}\delta_{jk} = c_{i\alpha}c_{j\beta}c_{k\gamma}T_{\alpha\beta\gamma}\delta_{jk} = c_{i\alpha}c_{j\beta}c_{j\gamma}T_{\alpha\beta\gamma} = c_{i\alpha}\delta_{\beta\gamma}T_{\alpha\beta\gamma} = c_{i\alpha}T_{\alpha\beta\beta}.$$

Т. е. действительно

$$T'_{ijj} = c_{i\alpha}T_{\alpha\beta\beta}.$$

Здесь  $j$  и  $\beta$  являются суммирующими индексами.

С помощью многократного свертывания тензора четного ранга можно найти его *след* (сумму элементов главной диагонали, обозначаемую  $\text{Sp}(\mathbf{T}^{(2n)})$ ). След не зависит от ориентировки осей (является *инвариантом* тензора):

$$T'_{ij}\delta_{ij} = c_{i\alpha}c_{j\beta}T_{\alpha\beta}\delta_{ij} \Rightarrow T'_{ii} = c_{i\alpha}c_{i\beta}T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\alpha}.$$

В частности,  $\text{Sp}(\delta_{ij}) = \delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$ , а след анизотропного тензора  $\text{Sp}(D_{ij}) = D_{ii} = 0$ .

Другим полезным инвариантом тензора является характеристический полином  $P(\lambda) \equiv \det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E})$ , где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица. Действительно, при произвольном ортогональном преобразовании координат получим

$$\mathbf{T}' = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{C}^T$$

и, следовательно, в новых осях для  $P'(\lambda)$  будет выполняться

$$\begin{aligned}P'(\lambda) &= \det(\mathbf{T}' - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{C}(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{C}^T) = \\&= \det \mathbf{C} \det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E}) \det \mathbf{C}^T = \det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E}) = P(\lambda).\end{aligned}$$

При любом допустимом преобразовании координат компоненты тензоров преобразуются по законам, сохраняющим результаты сложения, свертывания и внешнего (а, следовательно, и внутреннего) умножения, а также равенство тензоров.

Будучи физическими характеристиками среды, тензоры должны обладать определенной симметрией, отражающей структурную симметрию среды. Согласно *принципу Неймана*, симметрия макросвойства не ниже симметрии структуры (группа симметрии свойства должна включать все элементы симметрии структуры). Преобразования пространства приводят к преобразованию физических систем. Если при преобразовании физической системы преобразованная система имеет свойства, тождественные свойствам исходной, то такое преобразование называют *преобразованием симметрии*. *Точечным преобразованием симметрии* называют те, при котором хотя бы одна точка преобразуется сама в себя. Она принимается обычно за начало координат. Существует 14 типов точечных групп. Кристаллические решетки обладают *трансляционной симметрией*, когда любая физическая величина  $s$  остается неизменной при переносе пространства кристалла на определенные расстояния вдоль определенных направлений.

Рассмотрим преобразование тензора второго ранга, связывающего два вектора. Пусть

$$P_{\alpha} = \chi_{\alpha\beta} E_{\beta}.$$

Тогда для вектора  $P_{\alpha}$  в новой системе координат с учетом (Б.1) выполняется

$$P'_{\alpha} = c_{\alpha\beta} P_{\beta} = c_{\alpha\beta} \chi_{\beta\gamma} E_{\gamma} = c_{\alpha\beta} \chi_{\beta\gamma} c_{\delta\gamma} E'_{\delta} = \chi'_{\alpha\delta} E'_{\delta}$$

и, следовательно,

$$\chi'_{\alpha\delta} = c_{\alpha\beta} \chi_{\beta\gamma} c_{\delta\gamma}. \quad (\text{Б.3})$$

Вычисления для приведенного порядка сомножителей в (Б.3) можно схематично представить (свободные индексы  $\alpha$  и  $\delta$  фиксированы) в виде (точки обозначают элементы матриц)

$$(\bullet) = (\cdots)(\ddots)(\dot{\phantom{a}}) = (\cdots)(\dot{\phantom{a}}) = (\bullet),$$

что позволяет легко восстановить матричную форму этого выражения:

$$\mathbf{c}' = \mathbf{C} \mathbf{c} \mathbf{C}^T. \quad (\text{Б.4})$$

Если выберем другой порядок преобразования, то получим

$$P'_\alpha = \chi'_{\alpha\delta} E'_\delta = \chi'_{\alpha\delta} c_{\delta\gamma} E_\gamma = c_{\alpha\beta} P_\beta = c_{\alpha\beta} \chi_{\beta\gamma} E_\gamma \quad (\text{Б.5})$$

и, следовательно,

$$\chi'_{\alpha\delta} c_{\delta\gamma} = c_{\alpha\beta} \chi_{\beta\gamma}. \quad (\text{Б.6})$$

Из вида (Б.5) заметим, что в (Б.6)  $\alpha$  и  $\gamma$  – свободные индексы (поскольку рассматривается разложение компоненты вектора  $P'_\alpha$  по  $E_\gamma$ ), а  $\beta$  и  $\delta$  – суммирующие индексы и, следовательно, (Б.6) в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{C}\mathbf{c} = \mathbf{c}'\mathbf{C}. \quad (\text{Б.7})$$

Этот же результат можно получить из (Б.4), если заметить, что  $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T$  (см. (А.2)).

Рассмотрим тензор третьего ранга. В этом случае для этого тензора в новой системе координат получим

$$P'_\alpha = c_{\alpha\beta} P_\beta = c_{\alpha\beta} \chi_{\beta\gamma\delta} E_\gamma E_\delta = c_{\alpha\beta} \chi_{\beta\gamma\delta} c_{i\gamma} c_{j\delta} E'_i E'_j = \chi'_{\alpha ij} E'_i E'_j$$

и, следовательно,

$$\chi'_{\alpha ij} = c_{\alpha\beta} \chi_{\beta\gamma\delta} c_{i\gamma} c_{j\delta}. \quad (\text{Б.8})$$

Вычисления для приведенного порядка сомножителей в (Б.8) можно схематично представить в виде ( $\alpha, i, j$  – свободные индексы, т. е. фиксированы)

$$(\bullet) = (\cdots) \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} (\dot{:})(\dot{:}) = (\dot{\cdot} \ \dot{\cdot} \ \dot{\cdot})(\dot{:})(\dot{:}) = (\dot{\cdot} \ )(\dot{:}) = (\bullet),$$

что позволяет восстановить матричную форму этого выражения

$$\mathbf{c}'^{(2)} = \mathbf{C}\mathbf{c}^{(2)}\mathbf{C}^T\mathbf{C}^T. \quad (\text{Б.9})$$



## Приложение В. Элементы векторного анализа

### Основные свойства

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \left  \begin{array}{cc} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) & (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \end{array} \right  = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$
$\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{A} \equiv \operatorname{div} \mathbf{A}$ $\tilde{\mathbf{N}}\phi \equiv \operatorname{grad} \phi$ $\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{A} \equiv \operatorname{grad} \mathbf{A}$
$\tilde{\mathbf{N}}(\phi\psi) = \phi\tilde{\mathbf{N}}\psi + \psi\tilde{\mathbf{N}}\phi$ $\tilde{\mathbf{N}}f(\phi) = \frac{df}{d\phi}\tilde{\mathbf{N}}\phi$ $\tilde{\mathbf{N}} \cdot (\phi\mathbf{A}) = \phi\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\tilde{\mathbf{N}}\phi)$ $\tilde{\mathbf{N}} \times (\phi\mathbf{A}) = \phi\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{A} + \tilde{\mathbf{N}}\phi \times \mathbf{A}$ $\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{N}})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{N}})\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{A})$ $\tilde{\mathbf{N}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{B})$ $(\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{N}})\phi\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{N}}\phi) + \phi(\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{N}})\mathbf{B}$ $\tilde{\mathbf{N}} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{N}})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{N}})\mathbf{B} + \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{A})$
$\tilde{\mathbf{N}}^2 \equiv \tilde{\mathbf{N}} \cdot \tilde{\mathbf{N}}$ $\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi \equiv \tilde{\mathbf{N}} \cdot (\tilde{\mathbf{N}}\phi) = \tilde{\mathbf{N}}^2\phi$ $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{A}) = \tilde{\mathbf{N}}^2\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{N}} \times (\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{A})$ $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv \tilde{\mathbf{N}} \cdot (\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{A}) = 0$ $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv \tilde{\mathbf{N}} \times (\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{A}) = \tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{A}) - \tilde{\mathbf{N}}^2\mathbf{A}$ $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi \equiv \tilde{\mathbf{N}} \times (\tilde{\mathbf{N}}\phi) = 0$
$\int_V \tilde{\mathbf{N}}\phi(\mathbf{r}) dV = \oint_S d\mathbf{S}\phi(\mathbf{r})$ $\int_V \tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) dV = \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$ $\int_V \tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) dV = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$ $\int_V \tilde{\mathbf{N}}^2\phi(\mathbf{r}) dV = \oint_S d\mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{N}}\phi(\mathbf{r}) = \oint_S \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial n} dS$

*Векторы и дифференциальные и интегральные операторы в декартовых прямоугольных координатах( $x, y, z$ )*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \mathbf{i} & a_y \mathbf{j} & a_z \mathbf{l} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \mathbf{i} \\ b_y \mathbf{j} \\ b_z \mathbf{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \mathbf{i} \\ a_y \mathbf{j} \\ a_z \mathbf{l} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \mathbf{i} & b_y \mathbf{j} & b_z \mathbf{l} \end{pmatrix} =$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{l} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{l}$$

$$\tilde{\mathbf{N}} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{l}$$

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\tilde{\mathbf{N}} \phi(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{l}$$

$$\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{l} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{l}$$

$$\tilde{\mathbf{N}}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\tilde{\mathbf{N}}^2 \phi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\tilde{\mathbf{N}}^2 \mathbf{F}(x, y, z) = \tilde{\mathbf{N}}^2 F_x \mathbf{i} + \tilde{\mathbf{N}}^2 F_y \mathbf{j} + \tilde{\mathbf{N}}^2 F_z \mathbf{l}$$

Полезные векторные соотношения для радиус-вектора  $\mathbf{r}$   
и плоских волн  $\mathbf{E} = \mathcal{E} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \omega t)$  ( $\mathcal{E}$  и  $\mathbf{k}$  – постоянные векторы)

$\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{r} = 0$ $\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{r} = 3$ $\tilde{\mathbf{N}} \cdot (r^n \mathbf{r}) = (n + 3) r^n$ $\tilde{\mathbf{N}}(r^n) = n r^{n-2} \mathbf{r}$
$\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{k}$ $\tilde{\mathbf{N}} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{k}$ $\tilde{\mathbf{N}}(r^n \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = r^n \mathbf{k} + n (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) r^{n-2} \mathbf{r}$ $\tilde{\mathbf{N}}^2(r^n \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = n(n + 3) r^{n-2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ $(\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{N}}) \mathbf{r} = \mathbf{k}$ $\tilde{\mathbf{N}} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = 0$ $\tilde{\mathbf{N}} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = i \mathbf{k} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$
$\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{E} = i \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$ $\text{rot} \mathbf{E} = i (\mathbf{k} \times \mathbf{E})$ $\text{rot rot} \mathbf{E} = -\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})$

## Приложение Г. Основные формулы электромагнетизма в СИ и гауссовой системе

Наименование	Гауссова система	СИ
Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\text{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ $\text{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\text{div}\mathbf{B} = 0$	$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\text{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$ $\text{div}\mathbf{D} = \rho$ $\text{div}\mathbf{B} = 0$
Уравнения Максвелла в интегральной форме <sup>(*)</sup>	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \rho dV$ $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV$ $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$
Материальные уравнения	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ $\mathbf{j} = \frac{1}{c} \mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$ $\mathbf{j} = \frac{1}{c} \mathbf{E}$
Вектор Пойтинга	$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$	$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$
Плотность импульса электромагнитного поля	$\mathbf{K} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$	$\mathbf{K} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$
Момент электрического диполя	$\mathbf{p} = e\mathbf{r}_0$	$\mathbf{p} = e\mathbf{r}_0$
Механический момент, действующий на электрический диполь	$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$
Энергия диполя в электрическом поле	$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$	$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$
Интенсивность излучения диполя	$\mathbf{I} = \frac{2}{3c^2} \ddot{\mathbf{p}}^2$	$\mathbf{I} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{2}{3c^2} \ddot{\mathbf{p}}^2$
Момент электрического квадруполья (тензор второго порядка)	$\mathbf{M} = e\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$	$\mathbf{M} = e\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$
Потенциал точечного заряда	$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}$	$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r}$
Связь $\varphi$ и $\mathbf{E}$	$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$	$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$
Сила Лоренца, действующая на электрон	$\mathbf{F} = -\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$	$\mathbf{F} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

(\*) – правоориентированная поверхность  $\mathbf{S}$ , натянутая на контур  $\mathbf{l}$ , считается не зависящей от времени.

*Полезные константы электромагнетизма  
в СИ и гауссовой системе*

Наименование	Гауссова система	СИ
Основные единицы	с, см, г, эрг, дин... $1 \text{ см} = 0.01 \text{ м}$ , $1 \text{ дин} = 10^{-5} \text{ Н}$ $E, \rho, J$ – СГСЕ-ед	с, м, кг, Дж, В, Вт... $1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}$ , $300 \text{ В} = 1 \text{ СГСЕ}$ $E, \rho, J$ – В/м, Кл/м <sup>3</sup> , А/м <sup>2</sup>
Электрическая постоянная	–	$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнитная постоянная	–	$\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6} \text{ Г/м}$
Скорость света	$c = 2.998 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$	$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Скорость света в среде	$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$	$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}}$
Постоянная Планка	$h = 6.626 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}$ $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}$	$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Больцмана	$k = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/К}$	$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Элементарный заряд	$e = 4.80 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ}$	$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Масса электрона	$m = 0.91 \cdot 10^{-27} \text{ г}$	$m = 0.91 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$
Масса протона	$M = 1.67 \cdot 10^{-24} \text{ г}$	$M = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Классический радиус электрона	$r_e \equiv \frac{e^2}{mc^2} \approx 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$	$r_e = 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ м}$
Боровский радиус	$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.529 \cdot 10^{-8} \text{ см}$	$a_0 = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Электрическое поле на 1 боровской орбите	$E_a = \frac{e}{a_0^2} = 1.71 \cdot 10^7 \text{ СГСЭ}$	$E_a = 5.14 \cdot 10^{11} \text{ В/м}$
Число молекул в 1 см <sup>3</sup> при 0°C и 1 атм	$2.687 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$	–
Электрон-вольт	$1 \text{ эВ} = 1.60 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$	$1 \text{ эВ} = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$
Обратный сантиметр	$1 \text{ см}^{-1} = 1.987 \cdot 10^{-16} \text{ эрг}$	$1 \text{ см}^{-1} = 1.987 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}$

## Приложение Д. Полезные тригонометрические формулы

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

$$\operatorname{sh}(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi})$$

$$\operatorname{ch}(\varphi) = \frac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi})$$

$$\operatorname{sech}(\varphi) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\varphi)}$$

$$\operatorname{csch}(\varphi) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\varphi)}$$

$$\operatorname{ch}^2(\varphi) = 1 + \operatorname{sh}^2(\varphi)$$

$$\sin^2(\varphi) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\varphi)]$$

$$\cos^2(\varphi) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\varphi)]$$

$$2 \sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin(\alpha) \cos(\beta) = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

## Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред*. М.: Наука, 1982. 620 с.
2. Шен И.Р. *Принципы нелинейной оптики*. М.: Наука, 1989. 560 с.
3. Бломберген Н. *Нелинейная оптика*. М: Мир, 1966. 424 с.
4. Келих С. *Молекулярная нелинейная оптика*. М.: Наука, 1981. 672 с.
5. Райнтжес Дж. *Нелинейные оптические параметрические процессы в жидкостях и газах*. М.: Мир, 1987. 512 с.
6. Цернике Ф., Мидвинтер Дж. *Прикладная нелинейная оптика*. М.: Мир, 1976. 264 с.
7. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. *Проблемы нелинейной оптики*. М.: ВИНТИ, 1965, 295 с.
8. Магурин В.Г., Тарлыков В.А. *Когерентная оптика*. СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. 122 с.
9. Ахманов С. А., Никитин С. Ю. *Физическая оптика*. М.: Из-во МГУ, 2004. 656 с.
10. Ярив А. *Квантовая электроника*. М.: Советское радио, 1980. 488 с.
11. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. *Нелинейные волны*. М.: Наука, 2000. 272 с.
12. Maier M. *Quasisteady state in the stimulated Brillouin scattering of liquids*. Phys. Rev., 1968, v. 166, p. 113–119.
13. Maier M., Kaiser W., Giordmaine J.A. *Backward stimulation Raman scattering*. Phys. Rev., 1969, v. 177, p. 580–599.
14. Райзер Ю. П. *Физика газового разряда*. М.: Наука, 1992. 536 с.
15. Смолянский С.А. *Вакуумное рождение частиц в сильных электромагнитных полях*. Соросовский образов. журнал, 2001, т. 7, № 2, с. 69–75.
16. Durbin S.D., Arakelian S.M, Shen Y.R. *Laser-induced diffraction rings from a nematic-liquid-crystal film*. Opt. Lett., 1981, p. 411–413.

Подписано в печать ????.???2008. Гарнитура Таймс.

Формат 60×90/16. Бумага офсетная.

Объем ??? усл. печ. л.

Тираж ??? экз. Заказ №???. Цена договорная.

Издательство МИИГАиК  
105064, Москва, Гороховый пер., 4

Отпечатано в типографии МИИГАиК